Введение в модальную логику, Лекция 4

Даня Рогозин
МГУ, Serokell

20 октября
Computer Science Club
ПОМИ РАН

На прошлой лекции мы

- Ввели логики **T**, **K**4, **S**4, **S**4.2, **S**5, **D**
- Показали их каноничность данных логик и полноту в соответствующих классах шкал
- Рассмотрели формулу Гёделя-Лёба и увидели, что она не является канонической
- Определили селективную фильтрацию, с помощью которой доказали, что логика **GL** является логикой класса всех транзитивных нётеровых шкал

Конечная аксиоматизируемость и финитная аппроксимируемость

Определение

Нормальная модальная логика $\mathcal{L}$ *называется конечно аксиоматизируемой, если она имеет вид* $\mathcal{L} = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ *для некоторого конечного множества формул* Γ*.*

Определение

Нормальная модальная логика $\mathcal{L}$ *называется финитно аппроксимируемой, если* $\mathcal{L} = Log(\mathbb{F})$*, где* $\mathbb{F}$ *— это некоторый класс конечных шкал.*

Теорема Харропа

Теорема

Если нормальная модальная логика $\mathcal{L}$ финитно аппроксимируема и конечно аксиоматизируема, то она разрешима.

Proof.

Ясно, что $\mathcal{L}$ перечислима: всякая доказуемая формула будет доказана заведомо за конечное число в силу конечной аксиоматизируемости. С другой стороны, множество формул, которые не являются теоремами также перечислимо. Тогда мы порождаем шкалы и проверяем условия $\mathcal{F} \models \mathcal{L}$ и $\mathcal{F} \not\models \phi$. Далее применяем теорему Поста. И дело в шляпе. $\square$

Фильтрация модели

- Теорема Харропа дает униформный способ доказывать разрешимость конечно аксиоматизируемых логик, полных относительно класса конечных шкалах
- Следующая цель: уметь доказывать финитную аппроксимируемость
- Для этой цели определим минимальную фильтрацию модели

Минимальная фильтрация

Определение

Пусть $\mathcal{M} = \langle W, R, \vartheta \rangle$ — это модель Крипке и Γ — это помножество формул, замкнутое относительно подформул. Введем следующее отношение (эквивалентности)

$$w \sim_\Gamma v \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}, v \models \phi \text{ по всем } \phi \in \Gamma$$

Тогда минимальной фильтрацией модели $\mathcal{M}$ по Γ называется модель $\bar{\mathcal{M}} = \langle \overline{W}, \bar{R}, \bar{\vartheta} \rangle$, где

1. $\overline{W} = W / \sim_\Gamma$
2. *Пусть* $\bar{w}, \bar{v} \in \overline{W}$, *тогда* $\bar{w} \bar{R} \bar{v} \Leftrightarrow \exists x \in \bar{w} \; \exists y \in \bar{v} \;\; xRy$
3. $\bar{\vartheta}(p) = \{\bar{w} \in \bar{W} \mid \exists x \in \bar{w} \; \mathcal{M}, x \models p\}$

Минимальная фильтрация

Лемма

Пусть ϕ *— это формула,* $\mathcal{M}$ *— это модель, а* $\overline{\mathcal{M}}$ *— это минимальная фильтрация* $\mathcal{M}$ *по* $\mathrm{Sub}(\phi)$*. Тогда* $|\overline{W}| \leqslant 2^{|\mathrm{Sub}(\phi)|}$

Proof.

Несложная индукция по ϕ. $\square$

Лемма о минимальной фильтрации

Лемма

Пусть $\mathcal{M}$ — это модель Крипке, Γ — это множество, замкнутое относительно подформул, тогда

$$\mathcal{M}, x \models \phi \Leftrightarrow \overline{\mathcal{M}}, \bar{x} \models \phi \text{ для каждой } \phi \in \Gamma.$$

Доказывается индукцией по ϕ. Рассмотрим случай, когда $\phi \rightleftharpoons \Diamond\psi$.

Proof.

($\Rightarrow$) Если $\mathcal{M}, x \models \Diamond\psi$, тогда найдется $y \in R(x)$ такой, что $\mathcal{M}, y \models \psi$. Тогда, если xRy, то $\bar{x}\bar{R}\bar{y}$. По предположению индукции, $\overline{\mathcal{M}}, \bar{y} \models \psi$. Тогда $\overline{\mathcal{M}}, \bar{x} \models \Diamond\psi$. □

Лемма о минимальной фильтрации

Лемма

Пусть $\mathcal{M}$ — это модель Крипке, Γ — это множество, замкнутое относительно подформул, тогда

$$\mathcal{M}, x \models \phi \Leftrightarrow \bar{M}, \bar{x} \models \phi \text{ для каждой } \phi \in \Gamma.$$

Доказывается индукцией по ϕ. Рассмотрим случай, когда $\phi \rightleftharpoons \Diamond\psi$.

Proof.

$(\Leftarrow)$ $\bar{M}, \bar{x} \models \Diamond\psi$. Тогда найдется $c \in \bar{R}(\bar{x})$ такой, что $\bar{M}, c \models \psi$. Тогда существуют $w \in \bar{x}$ и $v \in c$, что wRv. По предположению индукции, $\mathcal{M}, v \models \psi$. Тогда $\mathcal{M}, w \models \Diamond\psi$. □

Финитная аппроксимируемость K

Теорема

$\mathbf{K} = \mathit{Log}(\mathbb{F})$, *где* $\mathbb{F}$ *— это класс всех конечных шкал.*

Proof.

Пусть $\mathbf{K} \nvdash \psi$. Тогда в некоторой модели $\mathcal{M}, x \not\models \psi$. Положим в качестве $\Gamma = \mathrm{Sub}(\psi)$. Рассмотрим фильтрацию $\overline{\mathcal{M}}$ по Γ. Тогда, по лемме о фильтрации, $\overline{\mathcal{M}}, \bar{x} \not\models \psi$. $\square$

Финитная аппроксимируемость логик $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$

Теорема

1. $\mathbf{T} = \mathrm{Log}(\mathbb{F})$, *где* $\mathbb{F}$ *— это класс всех конечных рефлексивных шкал*
2. $\mathbf{D} = \mathrm{Log}(\mathbb{F})$, *где* $\mathbb{F}$ *— это класс всех конечных сериальных шкал*
3. $\mathbf{B} = \mathbf{K} \oplus p \to \Box\Diamond p = \mathrm{Log}(F)$, *где* $\mathbb{F}$ *— это класс всех конечных симметричных шкал*

Proof.

Достаточно заметить, что при минимальной фильтрации рефлексивность, симметричность и сериальность сохраняются. Далее рассуждения аналогичные. □

Транзитивность отношения при минимальной фильтрации

Если исходная модель была транзитивной, то минимально фильтрованная модель не обязана быть таковой.

Пусть $\overline{\mathcal{M}}$ — минимальная фильтрация транзитивной модели. Пусть $\bar{w}, \bar{v}, \bar{u} \in \overline{W}$, такие что $\bar{w}\bar{R}\bar{v}$ и $\bar{v}\bar{R}\bar{u}$. Тогда найдутся такие $x \in \bar{w}, y \in \bar{v}$, что xRy. Также найдутся такие, $y' \in \bar{v}, z \in \bar{u}$, что $y'Rz$.

Но при этом совсем не факт, что yRy'. Таким образом, если исходное отношение было транзитивным, то минимальная фильтрация не обязана ее сохранять.

Для доказательства финитной аппроксимируемости логик, содержащих $\mathbf{K}4$, введем следующую разновидность фильтрации моделей.

Фильтрация Леммона

Определение

Пусть $\mathcal{M} = \langle W, R, \vartheta \rangle$ *— это транзитивная модель и* Γ *— это множество формул, замкнутое относительно подформул. Тогда фильтрацией Леммона модели* $\mathcal{M}$ *по множеству* Γ *— это модель* $\widetilde{\mathcal{M}} = \langle \overline{W}, \tilde{R}, \bar{\vartheta} \rangle$*, где*

$$\bar{w}\tilde{R}\bar{v} \Leftrightarrow \forall \psi (\Diamond\psi \in \Gamma \,\&\, \mathcal{M}, v \models \psi \vee \Diamond\psi \Rightarrow \mathcal{M}, w \models \Diamond\psi)$$

Лемма о фильтрации Леммона

Лемма

Пусть $\mathcal{M} = \langle W, R, \vartheta \rangle$ *— это транзитивная модель и* Γ *— это замкнутое относительно подформул множество формул. Если* $\widetilde{\mathcal{M}} = \langle \overline{W}, \tilde{R}, \bar{\vartheta} \rangle$ *— это фильтрация Леммона по* Γ*, тогда*

1. *Пусть* $\bar{w}, \bar{v} \in \overline{W}$*, тогда, если* $\bar{w} \overline{R} \bar{v}$*, то* $\bar{w} \tilde{R} \bar{v}$*.*
2. $\forall \phi \in \Gamma \ \ \mathcal{M}, w \models \phi \Leftrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}, \bar{w} \models \phi$
3. $\tilde{R}$ *транзитивно.*

Лемма о фильтрации Леммона

Лемма

Пусть $\bar{w}, \bar{v} \in \overline{W}$, тогда, если $\bar{w}\bar{R}\bar{v}$, то $\bar{w}\widetilde{R}\bar{v}$.

Proof.

Пусть $\bar{w}\bar{R}\bar{v}$, $\Diamond\psi \in \Gamma$ и при этом $\mathcal{M}, v \models \psi \vee \Diamond\psi$. Покажем, что $\mathcal{M}, w \models \Diamond\psi$. Пусть $x \in \bar{w}$, $y \in \bar{v}$, такие, что xRy. Разберем два случая:

1. Если $\mathcal{M}, v \models \psi$. Тогда, по определению, $\mathcal{M}, y \models \psi$. Откуда $\mathcal{M}, x \models \Diamond\psi$. Тогда $\mathcal{M}, w \models \Diamond\psi$.
2. Пусть $\mathcal{M}, v \models \Diamond\psi$. Тогда $\mathcal{M}, y \models \Diamond\psi$. Значит, найдется $z \in R(y)$, что $\mathcal{M}, z \models \psi$. По транзитивности, yRz, откуда xRy. Тогда $\mathcal{M}, w \models \Diamond\psi$.

$\square$

Лемма о фильтрации Леммона

Лемма

$\forall \phi \in \Gamma \;\; \mathcal{M}, w \models \phi \Leftrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}, \bar{w} \models \phi$

Индукция по построению формулы.

Proof.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{M}, w \models \Diamond\psi$. Тогда найдется $v \in R(w)$, что $\mathcal{M}, v \models \psi$. По предположению индукции, $\widetilde{\mathcal{M}}, \bar{v} \models \psi$. Заметим, что $\bar{w}\bar{R}\bar{v}$. По предыдущему пункту, $\bar{w}\tilde{R}\bar{v}$ и $\widetilde{\mathcal{M}}, \bar{w} \models \Diamond\psi$. □

Лемма о фильтрации Леммона

Лемма

$\forall \phi \in \Gamma \;\; \mathcal{M}, w \models \phi \Leftrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}, \bar{w} \models \phi$

Индукция по построению формулы.

Proof.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\widetilde{\mathcal{M}}, \bar{w} \models \Diamond\psi$. Тогда найдется $\bar{v} \in \widetilde{R}(\bar{w})$, что $\widetilde{\mathcal{M}}, \bar{v} \models \psi$. По предположению индукции, $\mathcal{M}, v \models \psi$.
Так как $\bar{w}\widetilde{R}\bar{v}$, $\Diamond\psi \in \Gamma$ и, более того, $\mathcal{M}, v \models \psi \vee \Diamond\psi$. Тогда $\mathcal{M}, w \models \Diamond\psi$ по определению $\widetilde{R}$. $\square$

Лемма о фильтрации Леммона

Лемма

$\widetilde{R}$ *транзитивно.*

Proof.

Пусть $\bar{w}\widetilde{R}\bar{v}$, $\bar{v}\widetilde{R}\bar{u}$ и $\Diamond\phi \in \Gamma$, такая, что $\mathcal{M}, u \models \phi \vee \Diamond\phi$. Покажем, что $\bar{w}\widetilde{R}\bar{u}$, для этой цели покажем, что $\mathcal{M}, w \models \Diamond\phi$. Так как $\bar{v}\widetilde{R}\bar{u}$, тогда $\mathcal{M}, u \models \Diamond\phi$. Значит, $\mathcal{M}, u \models \phi \vee \Diamond\phi$. Тогда $\mathcal{M}, w \models \Diamond\phi$, так как $\bar{w}\widetilde{R}\bar{v}$.

□

Финитная аппроксимируемость **K**4, **S**4 и **S**5

Теорема

1. **K**4 $= \mathrm{Log}(\mathbb{F})$, *где* $\mathbb{F}$ *— это класс всех конечных транзитивных шкал*
2. **S**4 $= \mathrm{Log}(\mathbb{F})$, *где* $\mathbb{F}$ *— это класс всех конечных предпорядков*
3. **S**5 $= \mathrm{Log}(\mathbb{F})$, *где* $\mathbb{F}$ *— это класс всех конечных отношений эквивалентности*

Proof.

1. Пусть **K**4 $\nvdash \phi$, тогда найдутся шкала $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, $x \in W$ и оценка ϑ, такие, что $\mathcal{M}, x \not\models \phi$. Положим $\Gamma = \mathrm{Sub}(\phi)$. По лемме о фильтрации Леммона, $\widetilde{\mathcal{M}}, \bar{x} \not\models \phi$.
2. Комбинируем рассуждения для **T** и **K**4.
3. Комбинируем рассуждения для **S**4 и **B**.

$\square$

Финитная аппроксимируемость $\mathbf{S}4.2$

- Покажем теперь финитную аппроксимируемость логики $\mathbf{S}4.2$, которая определялась как:

$$\mathbf{S}4.2 = \mathbf{S}4 \oplus \mathbf{ACR}$$

где $\mathbf{ACR} = \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$, формула, выражающая конфлюентность отношения.

- Текущая цель: показать, что $\mathbf{S}4.2$ — это логика конечных конфлюентных предпорядков.

Порожденная подмодель

Определение

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ *— это шкала Крипке и* $V \subseteq W$ *— это непустое подмножество* W. *Тогда сужение шкалы — это шкала* $\mathcal{F} \upharpoonright V = \langle V, R \upharpoonright V \rangle$, *где* $R \upharpoonright V = R \cap V \times V$.

Определение

Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$ *— это модель Крипке и* $V \subseteq W$ *— это непустое подмножество* W. *Тогда сужение модели на* V *— это модель* $\mathcal{M} \upharpoonright V = \langle \mathcal{F} \upharpoonright V, \vartheta' \rangle$, *где* $\mathcal{F} \upharpoonright V$ *— это сужение шкалы на* V *и* $\vartheta'(p) = \vartheta(p) \cap V$ *для каждой переменной* p.

Подмножество V R-замкнуто, если $x \in V$ и xRy влечет $y \in V$. В таком случае сужение модели и шкалы называются порожденными подшкалой и подмоделью.

Лемма о порожденной подмодели

Лемма

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ *— это шкала и* $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$ *— это модель Крипке. Пусть также* $V \subseteq W$ R*-замкнуто, тогда*

1. *Если* $w \in V$, *тогда* $\mathcal{M}, w \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{M} \upharpoonright V, w \models \phi$
2. $Log(\mathcal{F}) \subseteq Log(\mathcal{F} \upharpoonright V)$

Конус в шкале

Определение

Шкала $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ *— это шкала и* $x \in W$. *Тогда* $\mathcal{F}$ *— это шкала с корнем в* x, *если* $R^*(x) = W$.

Определение

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ *— это шкала.* R^* *— это рефлексивное транзитивное замыкание отношения* R. *Конусом в шкале* $\mathcal{F}$ *с вершиной* x *называется шкала* $\mathcal{F} \upharpoonright R^*(x)$, *где* $R^*(x) = \{y \in W \mid xR^*y\}$. *Обозначение* $\mathcal{F}\langle x\rangle$.

Лемма

$\mathcal{F}\langle x\rangle$ *— это порожденная подшкала* $\mathcal{F}$

Лемма о логике всех конусов класса шкал

Определение

Пусть $\mathbb{F}$ *— это класс шкал. Тогда* $\mathrm{Cones}(\mathbb{F}) = \{\mathcal{F}\langle x\rangle \mid x \in W \;\&\; \mathcal{F} \in \mathbb{F}\}$, *где* W *— это носитель шкалы* $\mathcal{F}$, *элемента данного класса шкал.*

Лемма

Пусть $\mathbb{F}$ *— это класс шкал. Тогда* $\mathrm{Log}(\mathbb{F}) = \mathrm{Log}(\mathrm{Cones}(\mathbb{F}))$.

Финитная аппроксимируемость $\mathbf{S}4.2$

Теорема

$\mathbf{S}4.2 = \mathrm{Log}(\mathbb{F})$, *где* $\mathbb{F}$ *— это класс конечных конфлюентных предпорядков.*

Proof.

Пусть $\mathbf{S}4.2 \nvdash \phi$. Тогда найдется шкала $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ и оценка ϑ, такие, что в модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$ мы имеем $\mathcal{M}, x \not\models \phi$. Тогда $\mathcal{F}\langle x \rangle$ — это конус в шкале $\mathcal{F}$ в точке x. Тогда $\mathcal{F}\langle x \rangle \models \mathbf{ACR}$.
Соответственно, $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{F}\langle x \rangle, \vartheta' \rangle$ — это порожденная подмодель. Здесь $\vartheta'(p) = \vartheta(p) \cap R(x)$. По лемме о порожденной подмодели, $\mathcal{M}', x \not\models \phi$.
Более того, в $\mathcal{F}\langle x \rangle$ имеет место свойство $\forall x, y \in W \, \exists z \, (xRz \,\&\, yRz)$, которое влечет конфлюентность. Дальше заметим, что это свойство сохраняется при фильтрации Леммона. Тогда $\widetilde{\mathcal{M}'}, \bar{x} \not\models \phi$. $\square$

Финитная аппроксимируемость логики **GL**

- Финитную аппроксимируемость логики **GL** мы докажем несколько иным способом
- В доказательстве полноты **GL** мы заметили, что любая **GL**-непротиворечивая формула выполнима в модели (вообще говоря, в строгом порядке), в которой длина любой цепи мажорируется числом подформул
- Тогда класс всех **GL**-шкал можно сузить до строгих порядков конечной высоты.
- Под строгим порядком высоты n мы имеем в виду такой порядок, в котором длина наибольшей цепи равна n. Ясно, что $n \in \mathbb{N}$

Транзитивное дерево

Определение

Шкала $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ называется транзитивным деревом, если $\mathcal{F}$ — это шкала с корнем и для каждого $x \in W$, $R^{-1}(x)$ — это конечная цепь.

Теорема

$\mathbf{GL} = \mathrm{Log}(\mathbb{F})$, *где $\mathbb{F}$ — это класс всех конечных иррефлексивных транзитивных деревьев.*

Сначала покажем, что для любого строгого порядка конечной высоты $\mathcal{F}$ с корнем найдется такое иррефлексивное транзитивное дерево $\mathcal{T}$, что существует p-морфизм $\mathcal{T} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$.

Основная лемма

Лемма

Пусть $\mathcal{F}$ — это строгий порядок конечной высоты с корнем, тогда найдется иррефлексивное транзитивное дерево $\mathcal{T}$, что $\mathcal{T} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$.

Proof.

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ — это строгий порядок конечной высоты и $r \in W$ — это корень шкалы $\mathcal{F}$. Введем отношение $\widehat{R}$:

$$x\widehat{R}y \Leftrightarrow xRy \;\&\; \neg\exists z \in W \;\; (xRz \;\&\; zRy)$$

Положим Paths $:= \{\langle r, a_1, \ldots, a_n \rangle \mid n \in \mathbb{N}, r\widehat{R}a_1\widehat{R} \ldots \widehat{R}a_n\}$. Введем на путях отношение S:

Если $\alpha, \beta \in$ Paths, тогда $\alpha S \beta \Leftrightarrow \alpha \neq \beta$ и путь α является префиксом пути β. То есть, $\exists y \in W \;\; (\alpha = \beta \cdot \langle y \rangle)$, где $(\cdot)$ — это конкатенация. $\square$

Основная лемма

Лемма

Пусть $\mathcal{F}$ — это строгий порядок конечной высоты с корнем, тогда найдется иррефлексивное транзитивное дерево $\mathcal{T}$, что $\mathcal{T} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$.

Proof.

(Продолжение). Рассмотрим шкалу $\mathcal{T} = \langle \mathrm{Paths}, S \rangle$. Нетрудно убедиться, что данная шкала является строгим порядком. Более того, полученное дерево путей является транзитивным деревом конечной высоты.

Рассмотрим отображение $f : \mathrm{Paths} \to W$, что $f : \langle r, a_1, \ldots, a_n \rangle \mapsto a_n$. □

Основная лемма

Лемма

Пусть $\mathcal{F}$ — это строгий порядок конечной высоты с корнем, тогда найдется иррефлексивное транзитивное дерево $\mathcal{T}$, что $\mathcal{T} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$.

Proof.

(Продолжение). Покажем, что f задает p-морфизм $\mathcal{T} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$. Во-первых, f монотонно, что следует из транзитивности исходного отношения в шкале. Во-вторых, если xRy, то найдется такое $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, что $x(\widehat{R})^n y$. Это наблюдение дает сюръективность и свойство поднятия. $\square$

Полнота **GL** относительно деревьев

Теорема

GL $= \mathrm{Log}(\mathbb{T})$, *где* $\mathbb{T}$ *— это класс всех конечных иррефлексивных транзитивных деревьев.*

Proof.

Пусть ϕ — это **GL**-непротиворечивая формула. По теореме о полноте, найдется такой строгий порядок конечной высоты $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, что в модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$ мы имеем $\mathcal{M}, x \models \phi$. По предыдущей лемме, шкала $\mathcal{F}$ является p-морфным образом некоторого иррефлексивного транзитивного дерева $\mathcal{T}$. Тогда ϕ будет выполнима в $\mathcal{T}$. $\square$

Полнота **GL** относительно деревьев

Теорема

GL $= \mathrm{Log}(\mathbb{T})$, *где* $\mathbb{T}$ *— это класс всех конечных иррефлексивных транзитивных деревьев.*

Proof.

(Продолжение) Пусть $\mathcal{M}$ — это модель на данном дереве с оценкой ϑ и $\mathcal{M}, x \models \phi$. Пусть $\Psi = \{\Diamond\psi \mid \Diamond\psi \in \mathrm{Sub}(\phi)\}$. Ясно, что Ψ имеет вид $\{\Diamond\phi_1, \ldots, \Diamond\phi_k\}$. Построим селективную фильтрацию модели $\mathcal{M}$ индукцией по k. $\square$

Полнота **GL** относительно деревьев

Теорема

$\mathbf{GL} = \mathrm{Log}(\mathbb{T})$, *где* $\mathbb{T}$ *— это класс всех конечных иррефлексивных транзитивных деревьев.*

Proof.

(Продолжение) При $k = 0$ положим $V_0 := \{x\}$. Пусть $y \in V_i$. Для каждой $\Diamond\phi \in \Phi$, что $\mathcal{M}, y \models \Diamond\phi$, возьмем некоторую точку $z \in R(x)$, что $\mathcal{M}, z \models \phi$. Полученные множества выбранных точек обозначим как V_y и положим

$$V_{i+1} := \bigcup_{y \in V_i} V_y.$$

Нетрудно заметить, что мощность каждого V_y не превосходит k. $\square$

Полнота GL относительно деревьев

Теорема

GL $= \mathrm{Log}(\mathbb{T})$, *где* $\mathbb{T}$ *— это класс всех конечных иррефлексивных транзитивных деревьев.*

Proof.

(Продолжение) Сопоставим каждой вершине y дерева $\mathcal{T}$ величину $h(y)$, наибольшую длину цепи, в которой y наибольший элемент. Нетрудно видеть, что при любом y, $h(y)$ не превосходит высоту всего дерева. Далее, мы проверяем индукцией по i, что если $z \in V_i$, то $i \leqslant h(z)$. Так как $\mathcal{T}$ имеет конечную высоту, то при некотором n $V_{n+1} = \varnothing$. Положим:

$$V = \bigcup_{i=0}^{n} V_i$$

Остается заметить, что $\mathcal{T} \upharpoonright V$ — это конечное иррефлексивное транзитивное дерево, а $\mathcal{M} \upharpoonright V$ — селективная фильтрация модели $\mathcal{M}$ по $\mathrm{Sub}(\phi)$. $\square$

Разрешимость

Теорема

Логики **K**, **K**4, **T**, **B**, **D**, **S**4, **S**4.2, **S**5, **GL** *разрешимы.*

Proof.

Каждая из этих логик финитно аппроксимируема и конечно аксиоматизируема. Значит, по теореме Харропа, эти логики разрешимы. □