Оптимальные и эффективные механизмы

Сергей Николенко

Теория экономических механизмов — ИТМО, весна 2008

Outline

Эффективные и оптимальные механизмы

- Мы бы хотели, чтобы механизм был *хорошим*.
- Для кого он может быть хорошим? Какие вы можете придумать смыслы для этого слова?

Эффективные и оптимальные механизмы

- Мы бы хотели, чтобы механизм был *хорошим*.
- Механизм, хороший для агентов — *эффективный* механизм.
- Он максимизирует social welfare — суммарный доход всех агентов.

Эффективные и оптимальные механизмы

- Мы бы хотели, чтобы механизм был *хорошим*.
- Для прямого механизма $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$ правило распределения $\boldsymbol{Q}$ *эффективно*, если

$$\forall \boldsymbol{x} \;\; \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{argmax}_{\boldsymbol{Q}} \sum_{j=1..N} Q_j x_j.$$

- Иначе говоря, объект достаётся тому, кому он *действительно* больше всего нужен.

Эффективные и оптимальные механизмы

- Мы бы хотели, чтобы механизм был *хорошим*.
- А может быть эффективным для продавца.
- Это значит, что нужно максимизировать ожидаемый доход.
- Такие механизмы называются *оптимальными*.

Эффективные и оптимальные механизмы

- Мы бы хотели, чтобы механизм был *хорошим*.
- Для оптимального механизма нужно максимизировать

$$\boldsymbol{E}(R) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{E}[m_i(X_i)],$$

где $m_i(X_i)$ — выплата агента i (X_i — его распределение).

Наши планы

- Мы сейчас рассмотрим оптимальные механизмы.
- Начнём с примера, а потом будем строить более общие конструкции.
- А в следующем разделе займёмся эффективными.

Что мы будем рассматривать

- Здесь мы рассматриваем прямые механизмы, в которых у каждого агента просто спрашивают его тип.
- Более того, мы ограничимся ситуацией аукциона, в котором продают одну вещь (один лот аукциона).
- Множество типов агента — множество $[0, \omega_i]$ возможных ценностей.
- Ценность x_i, взятая по распределению X_i, остаётся скрытой, известной только агенту i.
- При начале аукциона агент подаёт некоторую ставку b_i.

Что мы будем рассматривать

- Прямой механизм полностью описывается двумя параметрами: правилом распределения $\boldsymbol{Q}$ и правилом выплаты $\boldsymbol{M}$.
- В случае аукциона с одной вещью $\boldsymbol{Q} : \mathcal{B} \to 1..N$, а $\boldsymbol{M} : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^N$, где $\mathcal{B} = B_1 \times \ldots \times B_N$ — множество возможных векторов ставок агентов.
- Правило $\boldsymbol{Q}$ определяет, какой из N агентов получит продаваемую вещь, а правило $\boldsymbol{M}$ определяет, сколько каждый агент при этом заплатит аукционеру.

Аукцион второй цены с резервной ценой

- Давайте опять рассмотрим аукцион второй цены (он же аукцион Викри).
- Но на этот раз сделаем одну модификацию: добавим такую *резервную цену* r, что:
  - выигравший агент платит максимум между второй ставкой и r;
  - если все ставки ниже r, продавец оставляет товар себе.
- Резервная цена — минимальная, по которой продавец согласен расстаться с товаром.

Стратегии и выплаты

- Во-первых, стратегии не изменятся — по-прежнему доминантная стратегия в том, чтобы говорить правду (проверьте!).
- Во-вторых, как изменятся выплаты? Раньше была выплата

$$m(x) = \int_0^x yg(y)dy,$$

где $g(x) = (N-1)f(x)F(x)^{N-2}$.

- Что будет теперь?

Выплата в аукционе с резервной ценой

- Теперь тот, кто ставит r, ожидает заплатить просто $rG(r)$ (меньше r не бывает).
- А тот, кто ставит больше r, ожидает заплатить

$$m(x, r) = rG(r) + \int_r^x yg(y)dy.$$

Аукцион первой цены с резервной ценой

- Немножко отвлечёмся и ещё раз проиллюстрируем принцип эквивалентности доходности.
- В аукционе первой цены анализ будет точно таким же, как раньше, только теперь участник с ценностью $x < r$ вообще не будет участвовать, и останется

$$\beta(x) = \boldsymbol{E}[\max\{Y_1, r\} | Y_1 < x]$$

Аукцион первой цены с резервной ценой

- В аукционе первой цены анализ будет точно таким же, как раньше, только теперь участник с ценностью $x < r$ вообще не будет участвовать, и останется

$$\beta(x) = \boldsymbol{E}[\max\{Y_1, r\} | Y_1 < x] =$$

$$= r\frac{G(r)}{G(x)} + \frac{1}{G(x)}\int_r^x yg(y)dy$$

- Умножая на $G(x)$, получим ту же самую доходность (ту же выплату для агента i).

Доходность

- Но, хоть доходность и одинаковая у двух аукционов, может быть, она изменилась по сравнению с аукционами без резервной цены?

$$\boldsymbol{E}[m(X,r)] = \int_r^{\omega} m(x,r)f(x)dx =$$
$$= \int_r^{\omega} \left(rG(r) + \int_r^{x} yg(y)dy \right) f(x)dx =$$
$$= rG(r)(1-F(r)) + \int_r^{\omega} y(1-F(y))g(y)dy.$$

(мы меняли порядок интегрирования во втором слагаемом).

Как максимизировать?

- Как продавцу максимизировать доходность?
- Обозначим через x_0 его собственную ценность объекта (во сколько он оценивает тот факт, что объект останется у него).
- Тогда его общий доход от резервной цены r получается как

$$\Pi_0 = N\boldsymbol{E}[m(X, r)] + F(r)^N x_0.$$

Как максимизировать?

- $\Pi_0 = N\boldsymbol{E}[m(X,r)] + F(r)^N x_0$.
- Надо максимизировать; продифференцируем по r:

$$\frac{d\Pi_0}{dr} = N(1 - F(r) - rf(r))G(r) + NG(r)f(r)x_0.$$

Функция риска

- В статистике есть такая *функция риска*:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}.$$

- Она показывает, грубо говоря, мгновенную вероятность «смерти».
- Если F — вероятность того, что событие случится *до* времени x, то $\lambda(x)$ — мгновенная вероятность того, что событие случится во время x *при условии*, что раньше не случилось.

Функция риска

- При $x \to \omega$ $\lambda(x) \to \infty$.
- Можно выразить и наоборот:

$$-\lambda(x) = \frac{d}{dx}\ln(1 - F(x)), \text{ значит,}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(t)dt}.$$

Как максимизировать?

- В терминах функции риска получается
$$\frac{d\Pi_0}{dr} = N(1-(r-x_0)\lambda(r))(1-F(r))G(r).$$
- Т.е. при $x_0 > 0$ $\frac{d\Pi_0}{dr}$ в x_0 положительна, т.е. продавцу выгодно установить резервную цену $r > x_0$.
- При $x_0 = 0$ тоже выгодно (проверьте). Иначе говоря, *резервная цена должна быть выше ценности продукта для продавца*.

Как максимизировать?

- $\frac{d\Pi_0}{dr} = N(1-(r-x_0)\lambda(r))(1-F(r))G(r)$.
- А максимум получится, если

$$(r-x_0)\lambda(r) = 1, \text{ или } r^* - \frac{1}{\lambda(r^*)} = x_0.$$

Пример

- Подсчитаем оптимальную резервную цену для равномерного распределения ценностей агентов на $[0,1]$.
- Нужно найти ожидаемый доход у продавца в обоих случаях.
- Во-первых, поскольку ценности равномерно распределены на $[0,1]$,

$$F(x) = x, \quad f(x) = 1.$$

Пример

- Это значит, что

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{1}{1 - x}.$$

- Подсчитаем оптимальную резервную цену r^*:

$$x_0 = r^* - \frac{1}{\lambda(r^*)} = 2r^* - 1.$$

- Пусть $x_0 = 0$, тогда $r^* = \frac{1}{2}$ — искомая резервная цена.

Пример

- Найдём теперь ожидаемый доход продавца:

$$\Pi_0 = NrG(r)\left(1 - F(r)\right) + \int_r^1 y\left(1 - F(y)\right)g(y)dy + F(r)^N x_0.$$

- Поскольку $G(x) = x^N$, а значит, $g(x) = Nx^{N-1}$,

$$\Pi_0 = \frac{N^2}{(N+1)(N+2)} + \frac{Nr^{N+1}}{N+1} - \frac{2Nr^{N+2}}{N+2}.$$

Пример

- Следовательно, ожидаемый доход продавца без резервной цены ($r = 0$) равен $\frac{N^2}{(N+1)(N+2)}$.
- А при росте резервной цены ожидаемые доходы понемногу растут, достигая максимума при $r = \frac{1}{2}$.

Плата за участие

- Вместо резервной цены можно ввести плату за участие.
- Резервная цена r отсекает участников с ценностями $x < r$. То же самое получится, если заставить «за вход» заплатить
$$e = \int_0^r G(y)dy,$$
т.е. ожидаемый доход участника с ценностью ровно r.
- Но это верно, только если агенты нейтральны к риску.

Общая постановка

- Теперь вернёмся к нашей более общей ситуации.
- Для прямого механизма $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$ мы максимизируем

$$\boldsymbol{E}(R) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{E}[m_i(X_i)],$$

  где $m_i(X_i)$ — выплата агента i (X_i — его распределение).
- Давайте это явно подсчитаем.

Вспомним обозначения

- $q_i(z_i)$ — ожидаемая доходность агента i, когда он говорит z_i, а остальные говорят правду:

$$q_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} Q_i(z_i, \boldsymbol{x}_{-i}) f_{-i}(\boldsymbol{x}_{-i}) \mathbf{d}\boldsymbol{x}_{-i}.$$

- $m_i(z_i)$ — ожидаемая выплата агента i:

$$m_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} M_i(z_i, \boldsymbol{x}_{-i}) f_{-i}(\boldsymbol{x}_{-i}) \mathbf{d}\boldsymbol{x}_{-i}.$$

Вывод ожидаемого дохода продавца

$$\boldsymbol{E}[m_i(X_i)] = \int_0^{\omega_i} m_i(x_i) f_i(x_i) dx_i =$$
$$= m_i(0) + \int_0^{\omega_i} q_i(x_i) x_i f_i(x_i) dx_i - \int_0^{\omega_i}\int_0^{x_i} q_i(t_i) f_i(x_i) dt_i dx_i.$$

- Поменяем порядок интегрирования:

$$\int_0^{\omega_i}\int_0^{x_i} q_i(t_i) f_i(x_i) dt_i dx_i = \int_0^{\omega_i}\int_{t_i}^{\omega_i} q_i(t_i) f_i(x_i) dx_i dt_i =$$
$$= \int_0^{\omega_i} (1 - F_i(t_i)) q_i(t_i) dt_i.$$

Вывод ожидаемого дохода продавца

$$\boldsymbol{E}\left[m_i(X_i)\right] = \int_0^{\omega_i} m_i(x_i) f_i(x_i) dx_i =$$
$$= m_i(0) + \int_0^{\omega_i} q_i(x_i) x_i f_i(x_i) dx_i - \int_0^{\omega_i} \int_0^{x_i} q_i(t_i) f_i(x_i) dt_i dx_i.$$

- Итого (вспомним определение q_i):

$$\boldsymbol{E}\left[m_i(X_i)\right] = m_i(0) + \int_0^{\omega_i} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) q_i(x_i) f_i(x_i) dx_i =$$
$$= \int_{\mathcal{X}} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) Q_i(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

Вывод ожидаемого дохода продавца

- Итого доход продавца получается как

$$\boldsymbol{E}[R] = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{E}[m_i(X_i)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} m_i(0) + \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{X}} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) Q_i(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

- Его нужно оптимизировать при следующих условиях:
  - правдивость, что равносильно неубыванию q_i;
  - рациональность, что равносильно $m_i(0) \leq 0$.

Виртуальные ценности

- Мы введём понятие *виртуальной ценности* предмета для агента i:
$$\psi_i(x_i) = x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)}.$$
- Как доказать, что $\boldsymbol{E}[\psi_i(X_i)] = 0$?

Виртуальные ценности

- Перепишем:

$$\boldsymbol{E}[\psi_i(X_i)] = \boldsymbol{E}(X_i) - \int_{X_i} \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} f(x_i) dx_i = \\ = \boldsymbol{E}(X_i) - \int_{X_i} (1 - F_i(x_i))\, dx_i.$$

- Рассмотрим теперь отдельно интеграл справа, поменяв порядок интегрирования:

$$\int_0^{\omega_i} (1 - F_i(x_i))\, dx_i = \int_0^{\omega_i} \left(\int_{x_i}^{\omega_i} f_i(y) dy \right) dx_i = \\ = \int_0^{\omega_i} \left(\int_0^{y} dx_i \right) f_i(y) dy = \int_0^{\omega_i} f_i(y) y dy = \boldsymbol{E}(X_i).$$

Регулярные задачи

- Задача дизайна механизмов называется *регулярной*, если для всех i ψ_i является возрастающей функцией от x_i.
- Это эквивалентно тому, что функция риска λ_i возрастает, т.к.
$$\psi_i(x_i) = x_i - \frac{1}{\lambda_i(x_i)}.$$
- В дальнейшем будем рассматривать только регулярные задачи.

Посмотрим на функцию внимательно

- Посмотрим на нашу функцию внимательно:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(0) + \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{X}} \psi_i(x_i) Q_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

- Давайте пока сконцентрируемся на подынтегральном выражении:

$$\sum_{i=1}^{N} \psi_i(x_i) Q_i(\mathbf{x}).$$

Посмотрим на функцию внимательно

- Давайте пока сконцентрируемся на подынтегральном выражении:
$$\sum_{i=1}^{N} \psi_i(x_i) Q_i(\boldsymbol{x}).$$
- $\boldsymbol{Q}$ похожа на весовую функцию, взвешивающую ψ_i. Резонно было бы дать максимальный вес максимальному ψ_i (если он положительный), а на остальные плюнуть.
- Это бы максимизировало функцию *в каждой точке*, значит, и интеграл тоже.
- Это и будет идеей конструкции, но мы ещё не учитывали ограничения (правдивость и рациональность).

Конструкция оптимального механизма

- Рассмотрим прямой механизм $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$, в котором:
  - $\boldsymbol{Q}$ распределяет объект покупателю i с положительной вероятностью iff $\psi_i(x_i) = \max_{j=1..N} \psi_j(x_j)$:
$$Q_i(\boldsymbol{x}) > 0 \text{ iff } \psi_i(x_i) = \max_{j=1..N} \psi_j(x_j) \geq 0.$$
  - плата $\boldsymbol{M}$ равна
$$M_i(\boldsymbol{x}) = Q_i(\boldsymbol{x})x_i - \int_0^{x_i} Q_i(z_i, \boldsymbol{x}_{-i})dz_i.$$
- Мы сейчас докажем, что это и есть обещанный оптимальный механизм (если задача регулярна).

Правдивость

$$Q_i(\boldsymbol{x}) > 0 \text{ iff } \psi_i(x_i) = \max_{j=1..N} \psi_j(x_j) \geq 0.$$

$$M_i(\boldsymbol{x}) = Q_i(\boldsymbol{x})x_i - \int_0^{x_i} Q_i(z_i, \boldsymbol{x}_{-i})dz_i.$$

- Пусть $z_i < x_i$. Тогда, по регулярности, $\psi_i(z_i) < \psi_i(x_i)$, и, значит, для всех $\boldsymbol{x}_{-i}$ $Q_i(z_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \leq Q_i(z_i, \boldsymbol{x}_{-i})$.
- Значит, q_i неубывающая, т.е. механизм правдивый.

Рациональность

$$Q_i(\mathbf{x}) > 0 \text{ iff } \psi_i(x_i) = \max_{j=1..N} \psi_j(x_j) \geq 0.$$

$$M_i(\mathbf{x}) = Q_i(\mathbf{x})x_i - \int_0^{x_i} Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i})dz_i.$$

- Очевидно, что $M_i(0, \mathbf{x}_{-i}) = 0$, значит, $m_i(0) = 0$, и механизм рациональный.

Итого

$$Q_i(\mathbf{x}) > 0 \text{ iff } \psi_i(x_i) = \max_{j=1..N} \psi_j(x_j) \geq 0.$$

$$M_i(\mathbf{x}) = Q_i(\mathbf{x})x_i - \int_0^{x_i} Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i})dz_i.$$

- Это рациональный правдивый механизм.
- Он оптимален, т.к. максимизирует каждое из двух слагаемый формулы дохода по отдельности.

Его свойства

- Во-первых, максимальный доход получается по простой формуле:

$$\max \boldsymbol{E}[R] = \boldsymbol{E}[\max\{\psi_1(X_1), \ldots, \psi_N(X_N), 0\}].$$

- Другой вопрос: сколько (интуитивно) платит победитель?

Его свойства

- Рассмотрим новую функцию

$$y_i(\boldsymbol{x}_{-i}) = \inf\{z_i \mid \psi_i(z_i) > 0 \text{ и } \forall j \neq i \ \psi_i(z_i) \geq \psi_j(x_j)\}.$$

- Т.е. это минимальное значение ставки игрока i, которое выигрывает у всех остальных.
- Тогда определение $\boldsymbol{Q}$ будет таким:

$$Q_i(z_i, \boldsymbol{x}_{-i}) = \begin{cases} 1, & z_i > y_i(\boldsymbol{x}_{-i}), \\ 0, & z_i < y_i(\boldsymbol{x}_{-i}). \end{cases}$$

Его свойства

- Можно, значит, и интеграл посчитать:

$$\int_0^{x_i} Q_i(z_i, \boldsymbol{x}_{-i}) dz_i = \begin{cases} x_i - y_i(\boldsymbol{x}_{-i}), & x_i > y_i(\boldsymbol{x}_{-i}), \\ 0, & x_i < y_i(\boldsymbol{x}_{-i}). \end{cases}$$

- Значит,

$$M_i(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} y_i(\boldsymbol{x}_{-i}), & x_i > y_i(\boldsymbol{x}_{-i}), \\ 0, & x_i < y_i(\boldsymbol{x}_{-i}). \end{cases}$$

Его свойства

- То есть только победитель что-то платит, и он платит минимальную ставку, которая обеспечивает ему выигрыш.
- Это в точности основной принцип аукциона второй цены.
- Мы только что доказали, что он оптимален. Точнее, он с резервной ценой.

Ещё раз общий результат

Теорема

Для регулярной задачи дизайна механизмов механизм $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$, *где*

$$Q_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \psi_i(x_i) \geq \max_{j \neq i} \psi_j(x_j) \text{ и } \psi_i(x_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

$$M_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} y_i(\mathbf{x}_{-i}), & \psi_i(x_i) \geq \max_{j \neq i} \psi_j(x_j) \text{ и } \psi_i(x_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

является оптимальным.

Симметричный случай

- Пусть все f_i равны (агенты симметричны). Тогда все $\psi_i = \psi$.
- И получается, что

$$y_i(\mathbf{x}_{-i}) = \max\left\{\max_{j\neq i} x_j, \psi^{-1}(0)\right\}.$$

- То есть получается в точности аукцион второй цены с резервной ценой $r = \psi^{-1}(0)$.
- Каким будет $\psi^{-1}(0)$ для равномерных распределений на $[0, 1]$?

Outline

Суть

- Мы научились максимизировать доход продавца.
- Теперь давайте станем альтруистами и будем максимизировать social welfare.
- То есть будем пытаться распределить вещь тому, кому она больше всего нравится.

Оптимальный аукцион неэффективен

- Мы уже знаем, что аукцион второй цены (без резервной цены) эффективен.
- А вот, например, оптимальный аукцион, который мы только что рассматривали, может оказаться и неэффективным.
- Во-первых, резервная цена автоматически предполагает, что иногда объект никому не достанется, даже если есть положительные ставки.
- Во-вторых, максимизируется *виртуальная* ценность; если распределения несимметричные, то это вовсе не эквивалентно максимизации самих x_i.

Определение

- Мы сейчас будем обобщать аукцион второй цены.
- Во-первых, чуть обобщим $\mathcal{X}$: он теперь будет $x_i \in [\alpha_i, \omega_i]$, чтобы разрешить отрицательные ценности.

Определение

Функция распределения $\mathbf{Q}^*$ *называется эффективной, если она максимизирует social welfare, т.е.* $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$

$$\mathbf{Q}^*(\mathbf{x}) \in \mathrm{argmax}_{\mathbf{Q}} \sum_{j=1}^{N} Q_j x_j.$$

Определение

Определение

Функция распределения $\boldsymbol{Q}^*$ *называется эффективной, если она максимизирует social welfare, т.е.* $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$

$$\boldsymbol{Q}^*(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{argmax}_{\boldsymbol{Q}} \sum_{j=1}^{N} Q_j x_j.$$

- То есть просто даём вещь агенту с максимальной ценностью (если нет ничьих).
- *Эффективный* механизм — механизм с эффективной функцией распределения.

Определение

Определение

Функция распределения $\boldsymbol{Q}^*$ называется эффективной, если она максимизирует social welfare, т.е. $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$

$$\boldsymbol{Q}^*(\mathbf{x}) \in \mathrm{argmax}_{\boldsymbol{Q}} \sum_{j=1}^{N} Q_j x_j.$$

- И ещё одно обозначение — если $\boldsymbol{Q}^*$ уже эффективна, то мы обозначим через W значение этого самого social welfare:

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} Q_j^*(\mathbf{x}) x_j, \quad W_{-i}(\mathbf{x}) = \sum_{j \neq i} Q_j^*(\mathbf{x}) x_j.$$

История

- VCG — это Викри-Кларк-Гроувс (Vickrey-Clarke-Groves).
- Это не совместная работа, а три разных:
  - Vickrey (1961) — выдвинул идею аукциона второй цены;
  - Clarke (1971) — предложил аналогичный механизм в контексте public goods;
  - Groves (1973) — всё обобщил и сформулировал.

Определение

Определение

Механизм VCG (Vickrey-Clarke-Groves) — это эффективный механизм с правилом платежа $\mathcal{M}^V : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^N$*:*

$$M_i^V(\mathbf{x}) = W(\alpha_i, \mathbf{x}_{-i}) - W_{-i}(\mathbf{x}).$$

- Он *эффективный*, т.е. правило распределения $\boldsymbol{Q}$ уже задано:

$$\boldsymbol{Q}^*(\mathbf{x}) \in \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{Q}} \sum_{j=1}^{N} Q_j x_j.$$

Определение

Определение

Механизм VCG (Vickrey-Clarke-Groves) — это эффективный механизм с правилом платежа $\mathcal{M}^V : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^N$:

$$M_i^V(\mathbf{x}) = W(\alpha_i, \mathbf{x}_{-i}) - W_{-i}(\mathbf{x}).$$

- $M_i^V(\mathbf{x})$ — это разница между общим welfare при наименьшей возможной ставке агента i и welfare всех остальных агентов при текущей ставке.
- То есть, грубо говоря, насколько агент суммарно сделал хуже другим.

Определение

Определение

Механизм VCG (Vickrey-Clarke-Groves) — это эффективный механизм с правилом платежа $\mathcal{M}^V : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^N$*:*

$$M_i^V(\mathbf{x}) = W(\alpha_i, \mathbf{x}_{-i}) - W_{-i}(\mathbf{x}).$$

- В контексте аукционов $\alpha_i = 0$, и получается в точности аукцион второй цены (проверьте!).

Правдивость

- Если другие агенты говорят $\mathbf{x}_{-i}$, то прибыль агента i от ставки z_i

$$Q^*(z_i, \mathbf{x}_{-i})x_i - M_i^V(z_i, \mathbf{x}_{-i}) = \sum_{j=1}^{N} Q_j^*(z_i, \mathbf{x}_{-i})x_j - W(\alpha_i, \mathbf{x}_{-i}).$$

- Вычитаемое от z не зависит, а уменьшаемое по определению $\boldsymbol{Q}^*$ максимизируется, когда i говорит правду.
- Значит, аукцион VCG правдив.

Рациональность

- Мы много уже свойств знаем у правдивых механизмов. В частности, ожидаемая доходность

$$U_i^V(x_i) = \boldsymbol{E}[W(x_i, \boldsymbol{X}_{-i}) - W(\alpha_i, \boldsymbol{X}_{-i})]$$

будет возрастающей и выпуклой функцией.

- $U_i^V(\alpha_i) = 0$ и, по монотонности, мы получаем, что VCG рационален.

Максимальная эффективность

- Рассмотрим теперь другой какой-нибудь эффективный механизм, который тоже правдив.
- Тогда, по принципу эквивалентности доходности, его доходность U_i отличается от U_i^V на константу.
- Но если $U_i(\alpha_i) < U_i^V(\alpha_i) = 0$, то механизм будет нерациональным (у агента i с ценностью α_i отрицательная ожидаемая доходность).
- Значит, $U_i(z) > U_i^V(z)$, т.е. другой механизм больше даёт агентам; при одинаковом распределении $\boldsymbol{Q}^*$ это значит, что агенты платят меньше.

Теорема

Теорема

Среди всех механизмов, которые распределяют один объект и являются эффективными, правдивыми и рациональными, механизм VCG максимизирует ожидаемые выплаты каждого агента.

Обсуждение

Теорема

Среди всех механизмов, которые распределяют один объект и являются эффективными, правдивыми и рациональными, механизм VCG максимизирует ожидаемые выплаты каждого агента.

- На самом деле даже максимизируя выплаты, VCG всё равно не может добиться того, чтобы баланс сходился.
- Мы сейчас рассмотрим другой алгоритм, в нём баланс будет сходиться, но не будет рациональности.

Обсуждение

Теорема

Среди всех механизмов, которые распределяют один объект и являются эффективными, правдивыми и рациональными, механизм VCG максимизирует ожидаемые выплаты каждого агента.

- Но зато эта теорема поможет нам понять, а бывает вообще так, что баланс сходится.

Вычислительная эффективность

- Ещё нужно понимать, что механизм VCG, при всех своих хороших свойствах, может оказаться совершенно нереалистичен.
- Надо решать сложную задачу оптимизации. Можно ли это сделать быстро? Когда как.
- Задача сделать *вычислительно эффективный* механизм, т.е. механизм, который бы, например, работал полиномиально долго, — это совсем другая задача.
- Аналогично для оптимальных механизмов.

Outline

Budget balance

- Мы бы хотели, чтобы у наших механизмов *сходился баланс* (budget balance property).
- Иначе говоря, чтобы они могли существовать без внешних вливаний.
- Формально это выражается как

$$\sum_{i=1}^{N} M_i(\mathbf{x}) = 0,$$

т.е. сумма выплат всех агентов равна нулю.

Механизм AGV

- AGV — от Arrow–d'Aspremont–Gérard-Varet.
- История тоже непростая:
  - Две независимых работы — Arrow (1979) и d'Aspremont–Gérard-Varet (1979).
  - Более того, Gérard-Varet — это один человек, а не два. :)

Механизм AGV

- Этот механизм тоже эффективен (т.е. использует $\boldsymbol{Q}^*$).
- Его выплаты $\mathcal{M}^A$ определяются как

$$M_i^A(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{X}_{-j}}[W_{-j}(x_j, \boldsymbol{X}_{-j})] - \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{X}_{-i}}[W_{-i}(x_i, \boldsymbol{X}_{-i})].$$

- Теперь очевидно, что для всех $\boldsymbol{x}$

$$\sum_{i=1}^{N} M_i^A(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Механизм AGV

- Механизм AGV правдив: если другие агенты говорят $\boldsymbol{x}_{-i}$, а агент i говорит z_i, он получает

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{X}_{-i}}[Q_i^*(z_i,\boldsymbol{X}_{-i})+W_{-i}(z_i,\boldsymbol{X}_{-i})]- \\ -\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{X}_{-i}}\left[\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{X}_{-j}}[W_{-j}(X_j,\boldsymbol{X}_{-j})]\right].$$

- Вычитаемое не зависит от z_i, а первое максимизируется при $z_i=x_i$.

Теорема

Теорема

Эффективный, правдивый и рациональный механизм, у которого сходится баланс, существует тогда и только тогда, когда механизм VCG даёт положительную ожидаемую прибыль аукционеру.

Доказательство

- В одну сторону тривиально: VCG должен давать прибыль, потому что он самый эффективный.
- Нам нужно доказать в другую сторону: предъявить конструкцию такого замечательного механизма в том случае, когда VCG даёт прибыль.

Доказательство

- Начнём с механизма AGV $\mathcal{M}^A$. Принцип эквивалентности доходности нам говорит, что есть такие константы c_i^A, что
$$U_i^A(x_i) = \boldsymbol{E}[W(x_i, \boldsymbol{X}_{-i})] - c_i^A.$$
- Для VCG это тоже верно: существуют такие константы c_i^V, что
$$U_i^A(x_i) = \boldsymbol{E}[W(x_i, \boldsymbol{X}_{-i})] - c_i^V.$$
- Мы сейчас подправим AGV так, чтобы он прибыль давал, оставаясь рациональным.

Доказательство

- Дано, что VCG приносит прибыль:

$$\boldsymbol{E}\left[\sum_{i=1}^{N} M_i^V(\boldsymbol{X})\right] \geq 0.$$

- Поскольку AGV по определению в нуле:

$$\boldsymbol{E}\left[\sum_{i=1}^{N} M_i^V(\boldsymbol{X})\right] \geq \boldsymbol{E}\left[\sum_{i=1}^{N} M_i^A(\boldsymbol{X})\right].$$

- Или, в терминах наших констант,

$$\sum_{i=1}^{N} c_i^V \geq \sum_{i=1}^{N} c_i^A.$$

Доказательство

- $\sum_{i=1}^N c_i^V \geq \sum_{i=1}^N c_i^A$.
- Определим теперь поправки: для $i = 2..N$

$$d_i = c_i^A - c_i^V, \quad d_1 = -\sum_{i=2}^{N} d_i.$$

- Искомым механизмом будет

$$M_i(\mathbf{x}) = M_i^A(\mathbf{x}) + d_i.$$

Доказательство

- $M_i(\boldsymbol{x}) = M_i^A(\boldsymbol{x}) + d_i$.
- Очевидно, баланс сходится (это $\boldsymbol{M}^A$, подправленный на константы, которые в сумме дают 0).
- Механизм правдивый, потому что выплаты агента отличаются от выплат правдивого $\boldsymbol{M}^A$ на константу.
- Надо только проверить, что он рациональный, то есть ожидание каждого агента больше нуля.

Доказательство

- Для $i \neq 1$

$$U_i(x_i) = U_i^A(x_i) + d_i = U_i^A(x_i) + c_i^A - c_i^V = U_i^V(x) \geq 0.$$

- Для первого агента всё то же самое, нужно только заметить, что

$$d_1 = -\sum_{i=2}^{N} d_i = \sum_{i=2}^{N} (c_i^V - c_i^A) \geq c_1^A - c_1^V,$$

т.к. общая сумма $\sum_{i=1}^{N} c_i^V \geq \sum_{i=1}^{N} c_i^A$.

Спасибо за внимание!

- Lecture notes и слайды будут появляться на моей homepage: http://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/index.php?page=teaching
- Присылайте любые замечания, решения упражнений, новые численные примеры и прочее по адресам: sergey@logic.pdmi.ras.ru, snikolenko@gmail.com
- Заходите в ЖЖ smartnik.