

# Графовые потоки

Всеволод Опарин

CS Клуб, Осень 2014

16 ноября

# Связность графа

## Задача

Дан граф на  $n$  вершинах в виде потока ребер  $\sigma = \langle (u_1, v_1), \dots, (u_t, v_t) \rangle$ . Определить, связны ли вершины  $s$  и  $t$ .

- ▶ Нижняя оценка  $\Omega(n)$ . Вероятностная тоже.
- ▶ Решать задачи за  $O(n(\log n)^{O(1)})$ .
- ▶ Связность через Union-Find структуру. CHM.

# Двудольность графа

## Определение 1

Граф двудолен, если не содержит циклов нечетной длины.

## Определение 2

Граф двудолен, если вершины можно разделить на две доли, внутри каждой доли нет ребер.

## Задача

Дан граф в виде потока ребер. Проверить на двудольность. Если возможно, построить покраску. Один проход.

## Двудольность графа

- ▶ Двудольность монотонна.
- ▶ Union-Find + остовный лес.
- ▶ Отложенные операции на СНМ с покраской.

# Динамические деревья

## Динамические или link-cut деревья

Структура данных поддерживает лес на  $n$  вершинах. Операции амортизационно за  $O(\log n)$ .

- ▶  $\text{add}(v)$  – добавить вершину.
- ▶  $\text{link}(u, v)$  – привешиваем только корни.
- ▶  $\text{cut}(u, v)$  – разрезать ребро.
- ▶  $\text{revert}(u)$  – сделать  $u$  корнем.
- ▶  $\text{aggregate}_f(u, v)$  – агрегация ребер на пути из  $u$  в  $v$ .

## Применение

- ▶ Двудольные графы.
- ▶ Минимальное остовное дерево.
- ▶ Поиск мостов и компонент двусвязности.

# Кратчайшие пути

## Задача

Дан граф в виде потока ребер. Обработать, потом находить расстояния между произвольными вершинами. Один проход. Расстояния реберные.

## Определение

Подграф  $H$  графа  $G$  –  $t$ -спаннер, если  $d_G(u, v) \leq d_H(u, v) \leq t \cdot d_G(u, v)$ .

Решение

- ▶  $\text{process}(u, v)$ : если  $d_H(u, v) > t$ , добавить ребро  $(u, v)$ .
- ▶  $\text{dist}(u, v)$ : вернуть  $d_H(u, v)$ .
- ▶  $H$  –  $t$ -спаннер. Сколько ребер?

## Кратчайшие пути

- ▶  $H$  содержит  $m$  ребер и  $n$  вершин.
- ▶ Все циклы в  $H$  имеют длину  $> t$ .
- ▶ Средняя степень  $d = \frac{2m}{n}$ .
- ▶ Будем удалять последовательно все вершины степени  $\leq \frac{d}{2}$ .
- ▶ Вершины останутся. Удалим не более  $\frac{d}{2} \cdot n = m$  ребер.
- ▶ Для оставшегося графа  $\left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \leq n$ .
- ▶  $m = O(n^{1+\frac{2}{t}})$ .

# Паросочетания

## Задача

Дан граф в виде потока ребер. Найти максимальное паросочетание.

## Решение

- ▶  $\text{process}(u, v)$ : если  $u$  и  $v$  не заняты, берем.
- ▶ Приближение  $\frac{1}{2}$ ОРТ очевидно.
- ▶ Можно найти  $(\frac{2}{3} - \varepsilon) \cdot \text{ОРТ}$  за  $O(\frac{\log \varepsilon^{-1}}{\varepsilon})$  проходов.



# Паросочетания

Пусть есть веса.  $M$  – текущее паросочетание.

- ▶ Определим для ребра  $(u, v)$  подмножество  $C \subseteq M$ , касающихся  $u$  или  $v$ .
- ▶  $\text{process}(u, v)$ : если  $wt(u, v) \geq 2 \cdot wt(C)$ , берем.
- ▶  $S$  – результат,  $T(S)$  – то, что было в  $M$  без  $S$ ,  $M^*$  – оптимум.
- ▶  $wt(S) \geq wt(T(S))$ .
- ▶  $OPT \leq 2 \cdot (wt(T(S)) + 2 \cdot wt(S))$ . 6-приближение.
- ▶ Можно брать на условии  $wt(u, v) \geq (1 + \sqrt{2}) \cdot wt(C)$ . Получим  $3 + 2\sqrt{2} \approx 5.83$ -приближение.

# Число треугольников

## Задача

Дан граф в виде потока ребер. Найти число треугольников: циклов длины 3. Обозначим ответ через  $T$ .

## Простое решение

- ▶ Оценщик  $X$ : берем случайное ребро  $(u, v)$  из потока и случайную вершину  $w \in V \setminus \{u, v\}$ .
- ▶ Если  $w$  соединен ребрами  $u$  и  $v$ , то  $X = m \cdot (n - 2)$ , иначе 0.
- ▶  $\mathbf{E}[X] = T$ .  $\mathbf{D}[X] \leq T \cdot m \cdot n$ .
- ▶  $(\varepsilon, \delta)$ -аппроксимация за  $O(\varepsilon^{-2} \log \frac{1}{\delta} \frac{mn}{T})$ .

# Число треугольников

## Решение через эскизы

- ▶ Назначим каждой вершине  $v$  случайным образом значение  $g_v = \pm 1$ .
- ▶ Найдем сумму  $X = \sum_{(u,v) \in E} g_u \cdot g_v$ .
- ▶ Вернем  $\frac{1}{6}X^3$ .
- ▶  $\mathbf{E} [ X^3 ] = 6 \cdot T$ .
- ▶  $(\varepsilon, \delta)$ -аппроксимация за  $O(\varepsilon^{-2} \log \frac{1}{\delta} (\frac{mn}{T})^2)$ .
- ▶ Достаточно брать 12-независимую хэш-функцию.

Спасибо!

Вопросы?