Приближенное решение задач комбинаторной оптимизации: алгоритмы и трудность
Лекция 5: SDP релаксации для задачи об относительном разрезе

М. Вялый

Вычислительный центр
им. А.А.Дородницына
ФИЦ ИУ РАН

Санкт-Петербург, Computer Science Club, 2016

Напоминание

Относительный вес разреза $(S, V \setminus S)$ в графе $G(V, E)$

$$r_G(S) = \frac{E(S, V \setminus S)}{|S| \cdot |V \setminus S|},$$

(доля рёбер графа в множестве пар (вершина в S, вершина вне S)).

Однородная задача об относительном разрезе

Дано: граф $G(V, E)$

Найти: минимальную величину относительного разреза

$$r_G = \min_{\varnothing \subset S \subset V} r_G(S).$$

Релаксации задачи об относительном разрезе

Задача об относительном разрезе:

$$r_G = \min_{\varnothing \neq S \subset V} \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} d_S(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in V} d_S(u,v)},$$

d_S — полуметрика разреза (характеристическая функция).

Релаксация Лейтона–Рао:

$$\mathrm{LR}_{G,H} = \min_{d(\cdot,\cdot)\in M} \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} d(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in V} d(u,v)}.$$

$\mathcal{M}$ — конус всех полуметрик.

Ограничение ℓ^1-полуметриками:

$$r_G^1 = \min_{d(\cdot,\cdot)\in M_1} \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} d(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in V} d(u,v)}.$$

$\mathcal{M}_1$ — конус всех ℓ^1-полуметрик.

Релаксации задачи об относительном разрезе

Задача об относительном разрезе:

$$r_G = \min_{\varnothing \neq S \subset V} \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} d_S(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in V} d_S(u,v)},$$

d_S — полуметрика разреза (характеристическая функция).
Релаксация Лейтона–Рао:

$$\mathrm{LR}_{G,H} = \min_{d(\cdot,\cdot)\in M} \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} d(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in V} d(u,v)}.$$

$\mathcal{M}$ — конус всех полуметрик.
Ограничение ℓ^1-полуметриками:

$$r_G^1 = \min_{d(\cdot,\cdot)\in M_1} \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} d(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in V} d(u,v)}.$$

$\mathcal{M}_1$ — конус всех ℓ^1-полуметрик.

Релаксации задачи об относительном разрезе

Задача об относительном разрезе:

$$r_G = \min_{\varnothing \neq S \subset V} \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} d_S(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in V} d_S(u,v)},$$

d_S — полуметрика разреза (характеристическая функция).
Релаксация Лейтона–Рао:

$$\mathrm{LR}_{G,H} = \min_{d(\cdot,\cdot)\in M} \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} d(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in V} d(u,v)}.$$

$\mathcal{M}$ — конус всех полуметрик.
Ограничение ℓ^1-полуметриками:

$$r_G^1 = \min_{d(\cdot,\cdot)\in M_1} \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} d(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in V} d(u,v)}.$$

$\mathcal{M}_1$ — конус всех ℓ^1-полуметрик.

Релаксации задачи об относительном разрезе

Задача об относительном разрезе:

Лемма

Для любого графа $G(V, E_G)$ выполняется $r_G^1 = r_G$.

d_S -

Рел

Теорема (следствие теоремы Бургейна)

Для любого графа $G(V, E_G)$ выполняется
$r_G^1 = r(G) = O(\log|V| \cdot \mathrm{LR}_{G,H})$.

$\mathcal{M}$ — конус всех полуметрик.

Ограничение ℓ^1-полуметриками:

$$r_G^1 = \min_{d(\cdot,\cdot)\in M_1} \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} d(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in V} d(u,v)}.$$

$\mathcal{M}_1$ — конус всех ℓ^1-полуметрик.

Что дальше?

Нужен класс метрик, на котором

- приближение лучше, чем на всех метриках,
- минимум по этому классу метрик находится эффективно.

Метрики негативного типа

Полуметрика $d\colon V \times V \to \mathbb{R}$ негативного типа, если для некоторого вложения $F\colon V \to \mathbb{R}^m$

$$d(u,v) = \|F(u) - F(v)\|^2 \quad \text{для всех } u, v \in V.$$

Что дальше?

Нужен класс метрик, на котором

- приближение лучше, чем на всех метриках,
- минимум по этому классу метрик находится эффективно.

Метрики негативного типа

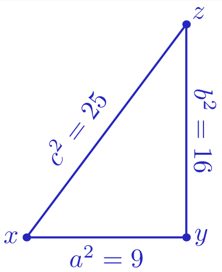
Полуметрика $d\colon V \times V \to \mathbb{R}$ негативного типа, если для некоторого вложения $F\colon V \to \mathbb{R}^m$

$$d(u,v) = \|F(u) - F(v)\|^2 \quad \text{для всех } u, v \in V.$$

Геометрический смысл

Наблюдение

Если $\|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geqslant \|x - z\|^2$, то в треугольнике xyz угол при вершине y не тупой.



Следствие

Множество точек в $\mathbb{R}^m$ образует метрику негативного типа, если все треугольники с вершинами в этих точках не тупоугольные.

Теорема Данцера–Грюнбаума

Теорема

Если N точек в $\mathbb{R}^d$ образуют метрику негативного типа, то $N \leqslant 2^d$.

Задача

У теоремы Данцера–Грюнбаума есть удивительно простое доказательство. Найдите его.

Теорема Данцера–Грюнбаума

Теорема

Если N точек в $\mathbb{R}^d$ образуют метрику негативного типа, то $N \leqslant 2^d$.

Задача

У теоремы Данцера–Грюнбаума есть удивительно простое доказательство. Найдите его.

Полуметрики разрезов — негативного типа

- На булевом $(0,1)$-кубе квадрат расстояния совпадает с хэмминговым расстоянием (и с ℓ^1-метрикой).
- Поэтому любое подмножество булева куба задаёт метрику негативного типа.
- Полуметрика разреза — негативного типа, так как это вложение в 1-мерный $(0,1)$-куб:

$$d_S(u,v) = |\chi_S(u) - \chi_S(v)|.$$

Полуметрики разрезов — негативного типа

- На булевом $(0,1)$-кубе квадрат расстояния совпадает с хэмминговым расстоянием (и с ℓ^1-метрикой).
- Поэтому любое подмножество булева куба задаёт метрику негативного типа.
- Полуметрика разреза — негативного типа, так как это вложение в 1-мерный $(0,1)$-куб:

$$d_S(u,v) = |\chi_S(u) - \chi_S(v)|.$$

Полуметрики разрезов — негативного типа

- На булевом $(0,1)$-кубе квадрат расстояния совпадает с хэмминговым расстоянием (и с ℓ^1-метрикой).
- Поэтому любое подмножество булева куба задаёт метрику негативного типа.
- Полуметрика разреза — негативного типа, так как это вложение в 1-мерный $(0,1)$-куб:

$$d_S(u,v) = |\chi_S(u) - \chi_S(v)|.$$

Аппроксимация Гёманса–Линиала

Определение

$$\mathrm{GL}_G = \min_{d(\cdot,\cdot)\in M_{\mathrm{neg}}} \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} d(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in V} d(u,v)}.$$

$\mathcal{M}_{\mathrm{neg}}$ — множество метрик негативного типа.

Очевидные неравенства

$$\mathrm{LR}_G \leqslant \mathrm{GL}_G \leqslant r_G.$$

Как вычислить аппроксимацию Гёманса–Линиала?

$\frac{n^2}{2}\mathrm{GL}_G$ совпадает с минимумом в задаче

$$\begin{array}{ll} \sum\limits_{(u,v)\in E_G} \|x_u - x_v\|^2 \to \min, & \\ \sum\limits_{u,v\in V} \|x_u - x_v\|^2 = n^2 = |V|^2, & \\ \|x_u - x_v\|^2 \leqslant \|x_u - x_w\|^2 + \|x_w - x_v\|^2, & u,v,w \in V, \\ x_u \in \mathbb{R}^m, & u \in V. \end{array}$$

Так как $\|x - y\|^2 = \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$, то это SDP программа на матрицу Грама системы векторов $\{x_u\}$.

Следствие

Есть алгоритм, оценивающий GL_G с точностью ε за время $\mathrm{poly}(\mathrm{size}, \log(1/\varepsilon))$.

Как вычислить аппроксимацию Гёманса–Линиала?

$\dfrac{n^2}{2}\mathrm{GL}_G$ совпадает с минимумом в задаче

$$\sum_{(u,v)\in E_G} \|x_u - x_v\|^2 \to \min,$$
$$\sum_{u,v\in V} \|x_u - x_v\|^2 = n^2 = |V|^2,$$
$$\|x_u - x_v\|^2 \leqslant \|x_u - x_w\|^2 + \|x_w - x_v\|^2, \quad u, v, w \in V,$$
$$x_u \in \mathbb{R}^m, \quad u \in V.$$

Так как $\|x - y\|^2 = \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$, то это SDP программа на матрицу Грама системы векторов $\{x_u\}$.

Следствие

Есть алгоритм, оценивающий GL_G с точностью ε за время $\mathrm{poly}(\mathrm{size}, \log(1/\varepsilon))$.

Теорема Ароры–Рао–Вазирани (ARV теорема)

Теорема

Существует такая константа c, что $r_G \leqslant c\sqrt{\log n} \cdot \mathrm{GL}_G$.

Так как $r_G^1 = r_G$, ARV теорема следует из такого утверждения

Основное неравенство

Если $X = \{x_v\} \subset \mathbb{R}^m$, $v \in V$ — метрика негативного типа, то существует такое вложение $f\colon V \to \mathbb{R}$, что

$$\frac{\sum_{(u,v)\in E_G} |f(u) - f(v)|}{\sum_{u,v\in V} |f(u) - f(v)|} \leqslant c\sqrt{\log n} \cdot \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} \|x_u - x_v\|^2}{\sum_{u,v\in V} \|x_u - x_v\|^2}.$$

Теорема Ароры–Рао–Вазирани (ARV теорема)

Теорема

Существует такая константа c, что $r_G \leqslant c\sqrt{\log n} \cdot \mathrm{GL}_G$.

Так как $r_G^1 = r_G$, ARV теорема следует из такого утверждения

Основное неравенство

Если $X = \{x_v\} \subset \mathbb{R}^m$, $v \in V$ — метрика негативного типа, то существует такое вложение $f\colon V \to \mathbb{R}$, что

$$\frac{\sum_{(u,v)\in E_G} |f(u) - f(v)|}{\sum_{u,v\in V} |f(u) - f(v)|} \leqslant c\sqrt{\log n} \cdot \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} \|x_u - x_v\|^2}{\sum_{u,v\in V} \|x_u - x_v\|^2}.$$

Какие вложения будут использоваться

Те же, что в доказательстве теоремы Бургейна: для множества $A \subseteq V$ полагаем

$$g_A(x_v) = \min_{a \in A} \|x_a - x_v\|^2.$$

Расстояние до множества — сжимающее отображение для любой полуметрики:
для любых $u, v \in V$ выполняется $|g_A(u) - g_A(v)| \leqslant d(u, v)$.
Это позволяет оценить числители в основном неравенстве

$$\frac{\sum_{(u,v)\in E_G} |g_A(x_u) - g_A(x_v)|}{\sum_{u,v\in V} |g_A(x_u) - g_A(x_v)|} \leqslant c\sqrt{\log n} \cdot \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} \|x_u - x_v\|^2}{\sum_{u,v\in V} \|x_u - x_v\|^2}$$

в нужную сторону (числитель слева не больше числителя справа).

Какие вложения будут использоваться

Те же, что в доказательстве теоремы Бургейна: для множества $A \subseteq V$ полагаем

$$g_A(x_v) = \min_{a \in A} \|x_a - x_v\|^2.$$

Расстояние до множества — сжимающее отображение для любой полуметрики:
для любых $u, v \in V$ выполняется $|g_A(u) - g_A(v)| \leqslant d(u, v)$.
Это позволяет оценить числители в основном неравенстве

$$\frac{\sum_{(u,v)\in E_G} |g_A(x_u) - g_A(x_v)|}{\sum_{u,v\in V} |g_A(x_u) - g_A(x_v)|} \leqslant c\sqrt{\log n} \cdot \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} \|x_u - x_v\|^2}{\sum_{u,v\in V} \|x_u - x_v\|^2}$$

в нужную сторону (числитель слева не больше числителя справа).

Какие вложения будут использоваться

Те же, что в доказательстве теоремы Бургейна: для множества $A \subseteq V$ полагаем

$$g_A(x_v) = \min_{a \in A} \|x_a - x_v\|^2.$$

Расстояние до множества — сжимающее отображение для любой полуметрики:
для любых $u, v \in V$ выполняется $|g_A(u) - g_A(v)| \leqslant d(u, v)$.
Это позволяет оценить числители в основном неравенстве

$$\frac{\sum_{(u,v)\in E_G} |g_A(x_u) - g_A(x_v)|}{\sum_{u,v\in V} |g_A(x_u) - g_A(x_v)|} \leqslant c\sqrt{\log n} \cdot \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} \|x_u - x_v\|^2}{\sum_{u,v\in V} \|x_u - x_v\|^2}$$

в нужную сторону (числитель слева не больше числителя справа).

Оценка знаменателей

Знаменатели в основном неравенстве

$$\frac{\sum_{(u,v)\in E_G} |g_A(x_u) - g_A(x_v)|}{\sum_{u,v\in V} |g_A(x_u) - g_A(x_v)|} \leqslant c\sqrt{\log n} \cdot \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} \|x_u - x_v\|^2}{\sum_{u,v\in V} \|x_u - x_v\|^2}$$

будут оцениваться как

$$\sum_{u,v\in V} |g_A(x_u) - g_A(x_v)| \geqslant \frac{1}{C\sqrt{\log n}} \cdot \sum_{u,v\in V} \|x_u - x_v\|^2 = \frac{n^2}{C\sqrt{\log n}}.$$

(Напомним, что мы выбрали нормировку, при которой среднее расстояние между парами точек равно 1.)

Замечание

В последнем неравенстве уже нет графа. Там считается вес вложения, то есть сумма по всем парам точек.

Оценка знаменателей

Знаменатели в основном неравенстве

$$\frac{\sum_{(u,v)\in E_G} |g_A(x_u) - g_A(x_v)|}{\sum_{u,v\in V} |g_A(x_u) - g_A(x_v)|} \leqslant c\sqrt{\log n} \cdot \frac{\sum_{(u,v)\in E_G} \|x_u - x_v\|^2}{\sum_{u,v\in V} \|x_u - x_v\|^2}$$

будут оцениваться как

$$\sum_{u,v\in V} |g_A(x_u) - g_A(x_v)| \geqslant \frac{1}{C\sqrt{\log n}} \cdot \sum_{u,v\in V} \|x_u - x_v\|^2 = \frac{n^2}{C\sqrt{\log n}}.$$

(Напомним, что мы выбрали нормировку, при которой среднее расстояние между парами точек равно 1.)

Замечание

В последнем неравенстве уже нет графа. Там считается вес вложения, то есть сумма по всем парам точек.

Геометрический вариант ARV теоремы

Теорема, из которой следует ARV

Существует такая константа $C > 0$, что для любой метрики негативного типа на n вершинах $\{x_v\}_{v \in V}$ со средним расстоянием между точками 1 найдётся такое множество $A \subseteq V$, что вес g_A-вложения не меньше $n^2/(C\sqrt{\log n})$.

Доказательство разбором случаев

Лёгкий случай: есть шар радиуса $1/4$, в котором находится $\Omega(n)$ точек. (Оценка годится для любой полуметрики.)

Сводимость: если все шары радиуса $1/4$ разреженные, то найдётся шар радиуса 2, в котором лежат $\Omega(n)$ точек и среднее расстояние между ними $\Omega(1)$. (Для любой полуметрики.)

Трудный случай: оценка веса вложения в предположении, что для некоторой константы c выполняются условия

$$\sum_{u,v \in V} \|x_u - x_v\|^2 \geqslant cn^2, \qquad \|x_v\| \leqslant 1.$$

(Выполняется только для полуметрики негативного типа.)

Доказательство разбором случаев

Лёгкий случай: есть шар радиуса $1/4$, в котором находится $\Omega(n)$ точек. (Оценка годится для любой полуметрики.)

Сводимость: если все шары радиуса $1/4$ разреженные, то найдётся шар радиуса 2, в котором лежат $\Omega(n)$ точек и среднее расстояние между ними $\Omega(1)$. (Для любой полуметрики.)

Трудный случай: оценка веса вложения в предположении, что для некоторой константы c выполняются условия

$$\sum_{u,v \in V} \|x_u - x_v\|^2 \geqslant cn^2, \qquad \|x_v\| \leqslant 1.$$

(Выполняется только для полуметрики негативного типа.)

Доказательство разбором случаев

Лёгкий случай: есть шар радиуса $1/4$, в котором находится $\Omega(n)$ точек. (Оценка годится для любой полуметрики.)

Сводимость: если все шары радиуса $1/4$ разреженные, то найдётся шар радиуса 2, в котором лежат $\Omega(n)$ точек и среднее расстояние между ними $\Omega(1)$. (Для любой полуметрики.)

Трудный случай: оценка веса вложения в предположении, что для некоторой константы c выполняются условия

$$\sum_{u,v\in V} \|x_u - x_v\|^2 \geqslant cn^2, \qquad \|x_v\| \leqslant 1.$$

(Выполняется только для полуметрики негативного типа.)

Доказательство разбором случаев

Лёгкий случай: есть шар радиуса $1/4$, в котором находится $\Omega(n)$ точек. (Оценка годится для любой полуметрики.)

Сводимость: если все шары радиуса $1/4$ разреженные, то найдётся шар радиуса 2, в котором лежат $\Omega(n)$ точек и среднее расстояние между ними $\Omega(1)$. (Для любой полуметрики.)

Трудный случай: оценка веса вложения в предположении, что для некоторой константы c выполняются условия

$$\sum_{u,v\in V} \|x_u - x_v\|^2 \geqslant cn^2, \qquad \|x_v\| \leqslant 1.$$

(Выполняется только для полуметрики негативного типа.)

Лёгкий случай

Нормировка на полуметрику

$$\sum_{u,v \in V} d(u,v) = n^2 = |V|^2 \,.$$

$B(a,r) = \{x : d(a,x) \leqslant r\}$ — шар радиуса r с центром в точке a.

Лемма о плотном шаре

Пусть в нормированной полуметрике для точки a выполняется $|B(a,1/4)| \geqslant n/6$. Тогда для $A = B(a,1/4)$ выполняется

$$\sum_{u,v \in V} |g_A(u) - g_A(v)| \geqslant \frac{n^2}{24} = \frac{1}{24} \cdot \sum_{u,v \in V} d(u,v).$$

Лёгкий случай

Нормировка на полуметрику

$$\sum_{u,v \in V} d(u,v) = n^2 = |V|^2 \,.$$

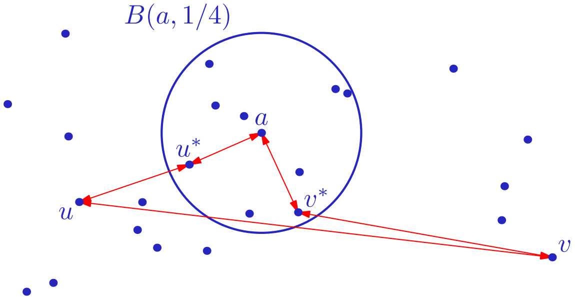
$B(a,r) = \{x : d(a,x) \leqslant r\}$ — шар радиуса r с центром в точке a.

Лемма о плотном шаре

Пусть в нормированной полуметрике для точки a выполняется $|B(a,1/4)| \geqslant n/6$. Тогда для $A = B(a,1/4)$ выполняется

$$\sum_{u,v \in V} |g_A(u) - g_A(v)| \geqslant \frac{n^2}{24} = \frac{1}{24} \cdot \sum_{u,v \in V} d(u,v).$$

Оценка расстояния между точками



u^* — ближайшая к u в шаре $A = B(a, 1/4)$
v^* — ближайшая к v
Из неравенства треугольника

$$d(u,v) \leqslant d(u,u^*) + d(u^*,a) + d(a,v^*) + d(v^*,v) =$$

$$= g_A(u) + d(u^*,a) + d(a,v^*) + g_A(v) \leqslant g_A(u) + g_A(v) + \frac{1}{2}\,.$$

Суммируем неравенство

$$d(u,v) \leqslant g_A(u) + g_A(v) + \frac{1}{2}$$

по всем парам точек. В правую часть каждая $g_A(v)$ войдёт n раз из первого слагаемого и n раз из второго.

Поэтому

$$n^2 = \sum_{u,v \in V} d(u,v) \leqslant 2n \sum_v g_A(v) + \frac{n^2}{2},$$

$$\text{то есть } \sum_v g_A(v) \geqslant \frac{n}{4}.$$

Получаем нижнюю оценку веса вложения g_A

$$\sum_{u,v \in V} |g_A(u) - g_A(v)| \geqslant \sum_{u \in A, v \in V} |0 - g_A(v)| \geqslant \frac{1}{4}|A| \cdot n \geqslant \frac{n^2}{24}.$$

Доказательство леммы о плотном шаре

Суммируем неравенство

$$d(u,v) \leqslant g_A(u) + g_A(v) + \frac{1}{2}$$

по всем парам точек. В правую часть каждая $g_A(v)$ войдёт n раз из первого слагаемого и n раз из второго.
Поэтому

$$n^2 = \sum_{u,v \in V} d(u,v) \leqslant 2n \sum_{v} g_A(v) + \frac{n^2}{2},$$

то есть $\displaystyle\sum_{v} g_A(v) \geqslant \frac{n}{4}$.

Получаем нижнюю оценку веса вложения g_A

$$\sum_{u,v \in V} |g_A(u) - g_A(v)| \geqslant \sum_{u \in A, v \in V} |0 - g_A(v)| \geqslant \frac{1}{4}|A| \cdot n \geqslant \frac{n^2}{24}.$$

Доказательство леммы о плотном шаре

Суммируем неравенство

$$d(u,v) \leqslant g_A(u) + g_A(v) + \frac{1}{2}$$

по всем парам точек. В правую часть каждая $g_A(v)$ войдёт n раз из первого слагаемого и n раз из второго.
Поэтому

$$n^2 = \sum_{u,v \in V} d(u,v) \leqslant 2n \sum_v g_A(v) + \frac{n^2}{2}\,,$$

$$\text{то есть } \sum_v g_A(v) \geqslant \frac{n}{4}\,.$$

Получаем нижнюю оценку веса вложения g_A

$$\sum_{u,v \in V} |g_A(u) - g_A(v)| \geqslant \sum_{u \in A, v \in V} |0 - g_A(v)| \geqslant \frac{1}{4}|A| \cdot n \geqslant \frac{n^2}{24}\,.$$

Если все шары радиуса 1/4 разреженные

Утверждение

Пусть нормированная полуметрика такова, что в каждом шаре $B(u, 1/4)$ лежит меньше $n/6$ точек. Тогда найдётся такая точка $z \in V$, что шар $Z = B(z, 2)$ содержит хотя бы $1/3$ всех точек и

$$\sum_{u,v \in Z} d(u, v) \geqslant \frac{1}{8}|Z|^2.$$

Шар с большим количеством точек найдётся

Предположим противное: $|B(u, 2)| < n/3$ для всех u. Тогда

$$\sum_{u,v} d(u, v) > 2 \sum_{u} |V \setminus B(u, 2)| > 2 \cdot n \cdot \frac{2}{3} \cdot n = \frac{4}{3} \cdot n^2.$$

Это противоречит нормировке.

Если все шары радиуса $1/4$ разреженные

Утверждение

Пусть нормированная полуметрика такова, что в каждом шаре $B(u, 1/4)$ лежит меньше $n/6$ точек. Тогда найдётся такая точка $z \in V$, что шар $Z = B(z, 2)$ содержит хотя бы $1/3$ всех точек и

$$\sum_{u,v \in Z} d(u, v) \geqslant \frac{1}{8}|Z|^2.$$

Шар с большим количеством точек найдётся

Предположим противное: $|B(u, 2)| < n/3$ для всех u. Тогда

$$\sum_{u,v} d(u, v) > 2 \sum_{u} |V \setminus B(u, 2)| > 2 \cdot n \cdot \frac{2}{3} \cdot n = \frac{4}{3} \cdot n^2.$$

Это противоречит нормировке.

Все шары радиуса $1/4$ разреженные (окончание)

Утверждение (в тех же предположениях)

Если в шаре $Z = B(z, 2)$ хотя бы $1/3$ всех точек, то

$$\sum_{u,v \in Z} d(u, v) \geqslant \frac{1}{8}|Z|^2.$$

Доказательство

Все шары радиуса $1/4$ содержат меньше $n/6$ точек, то есть меньше $|Z|/2$ точек. Поэтому

$$\sum_{u,v \in Z} d(u, v) \geqslant \sum_{u \in Z} \frac{1}{4} \cdot |Z \setminus B(u, 1/4)| > \sum_{u \in Z} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}|Z| = |Z| \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{|Z|}{2}.$$

Все шары радиуса $1/4$ разреженные (окончание)

Утверждение (в тех же предположениях)

Если в шаре $Z = B(z, 2)$ хотя бы $1/3$ всех точек, то

$$\sum_{u,v \in Z} d(u, v) \geqslant \frac{1}{8}|Z|^2.$$

Доказательство

Все шары радиуса $1/4$ содержат меньше $n/6$ точек, то есть меньше $|Z|/2$ точек. Поэтому

$$\sum_{u,v \in Z} d(u, v) \geqslant \sum_{u \in Z} \frac{1}{4} \cdot |Z \setminus B(u, 1/4)| > \sum_{u \in Z} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}|Z| = |Z| \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{|Z|}{2}.$$

Выделение трудного случая

$\{x_v\}$, $v \in V$, — полуметрика негативного типа
Среднее расстояние между точками равно 1
Каждый шар радиуса $1/4$ содержит меньше $n/6$ точек.
Доказали, что есть шар радиуса 2, в котором $n' \geqslant n/3$ точек.
На этом шаре рассмотрим метрику $d'(u,v) = \frac{1}{2}d(u,v)$. Для этой метрики выполняются условия

$$\sum_{u,v \in Z} \|x'_u - x'_v\|^2 \geqslant \frac{1}{16}(n')^2 \geqslant cn^2, \qquad \|x'_v\| \leqslant 1.$$

Если доказать геометрический вариант ARV теоремы для $d'(\cdot,\cdot)$, то для исходной метрики он также будет выполняться (с худшей константой).

Выделение трудного случая

$\{x_v\}$, $v \in V$, — полуметрика негативного типа
Среднее расстояние между точками равно 1
Каждый шар радиуса $1/4$ содержит меньше $n/6$ точек.
Доказали, что есть шар радиуса 2, в котором $n' \geqslant n/3$ точек.
На этом шаре рассмотрим метрику $d'(u,v) = \frac{1}{2}d(u,v)$. Для этой метрики выполняются условия

$$\sum_{u,v \in Z} \|x'_u - x'_v\|^2 \geqslant \frac{1}{16}(n')^2 \geqslant cn^2, \qquad \|x'_v\| \leqslant 1.$$

Если доказать геометрический вариант ARV теоремы для $d'(\cdot,\cdot)$, то для исходной метрики он также будет выполняться (с худшей константой).

Выделение трудного случая

$\{x_v\}$, $v \in V$, — полуметрика негативного типа
Среднее расстояние между точками равно 1
Каждый шар радиуса $1/4$ содержит меньше $n/6$ точек.
Доказали, что есть шар радиуса 2, в котором $n' \geqslant n/3$ точек.
На этом шаре рассмотрим метрику $d'(u,v) = \frac{1}{2}d(u,v)$. Для этой метрики выполняются условия

$$\sum_{u,v \in Z} \|x'_u - x'_v\|^2 \geqslant \frac{1}{16}(n')^2 \geqslant cn^2, \qquad \|x'_v\| \leqslant 1.$$

Если доказать геометрический вариант ARV теоремы для $d'(\cdot,\cdot)$, то для исходной метрики он также будет выполняться (с худшей константой).

Трудный случай

$\{x_v\}$, $v \in V$, — полуметрика негативного типа,

$$\sum_{u,v \in V} \|x_u - x_v\|^2 \geqslant cn^2, \qquad \|x_v\| \leqslant 1.$$

Ищем большие разделённые подмножества:

такие A, B, что каждое содержит $\Omega(n)$ элементов, а расстояния (обычные евклидовы) между точками из разных подмножеств не меньше $\ell = \Omega(\log^{1/4} n)$. Если нашли, получаем оценку

$$\sum_{u,v \in V} |g_A(x_u) - g_A(x_v)| \geqslant \sum_{u \in A,\ v \in B} |g_A(x_u) - g_A(x_v)| =$$

$$= \sum_{u \in A,\ v \in B} |0 - g_A(x_v)| = |A| \sum_{v \in B} g_A(x_v) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{u \in A,\ v \in B} d(u,v) \cdot |A| \cdot |B| \geqslant \ell^2 |A| \cdot |B| = \Omega(n^2 / \sqrt{\log n})$$

Вероятностный алгоритм

Неформальное описание

В алгоритме два параметра α, C (зависят от среднего расстояния c).

1. Ортогонально проектируем точки из множества $X = \{x_v, v \in V\}$ на случайную прямую (задаётся единичным вектором s, равномерно распределённым по сфере S^{m-1}).
2. Отбираем по $\lceil \alpha n \rceil$ точек в крайние множества: «нижнее» и «верхнее». (По величине проекции.)
3. Если нашлась пара точек из разных крайних множеств на расстоянии $\|x_u - x_v\| \leqslant \ell = C \log^{-1/4} n$, то удаляем эти точки.
4. Повторяем шаг 3 пока возможно. Оставшиеся в конце множества A, B объявляем результатом работы.

Алгоритм гарантирует разделённость. Нужно доказать:

с заметной вероятностью получатся большие множества.

Вероятностный алгоритм

Неформальное описание

В алгоритме два параметра α, C (зависят от среднего расстояния c).

1. Ортогонально проектируем точки из множества $X = \{x_v, v \in V\}$ на случайную прямую (задаётся единичным вектором s, равномерно распределённым по сфере S^{m-1}).
2. Отбираем по $\lceil \alpha n \rceil$ точек в крайние множества: «нижнее» и «верхнее». (По величине проекции.)
3. Если нашлась пара точек из разных крайних множеств на расстоянии $\|x_u - x_v\| \leqslant \ell = C \log^{-1/4} n$, то удаляем эти точки.
4. Повторяем шаг 3 пока возможно. Оставшиеся в конце множества A, B объявляем результатом работы.

Алгоритм гарантирует разделённость. Нужно доказать:

с заметной вероятностью получатся большие множества.

Вероятностный алгоритм

Неформальное описание

В алгоритме два параметра α, C (зависят от среднего расстояния c).

1. Ортогонально проектируем точки из множества $X = \{x_v, v \in V\}$ на случайную прямую (задаётся единичным вектором s, равномерно распределённым по сфере S^{m-1}).
2. Отбираем по $\lceil \alpha n \rceil$ точек в крайние множества: «нижнее» и «верхнее». (По величине проекции.)
3. Если нашлась пара точек из разных крайних множеств на расстоянии $\|x_u - x_v\| \leqslant \ell = C \log^{-1/4} n$, то удаляем эти точки.
4. Повторяем шаг 3 пока возможно. Оставшиеся в конце множества A, B объявляем результатом работы.

Алгоритм гарантирует разделённость. Нужно доказать:

с заметной вероятностью получатся большие множества.

Вероятностный алгоритм

Неформальное описание

В алгоритме два параметра α, C (зависят от среднего расстояния c).

1. Ортогонально проектируем точки из множества $X = \{x_v, v \in V\}$ на случайную прямую (задаётся единичным вектором s, равномерно распределённым по сфере S^{m-1}).
2. Отбираем по $\lceil \alpha n \rceil$ точек в крайние множества: «нижнее» и «верхнее». (По величине проекции.)
3. Если нашлась пара точек из разных крайних множеств на расстоянии $\|x_u - x_v\| \leqslant \ell = C \log^{-1/4} n$, то удаляем эти точки.
4. Повторяем шаг 3 пока возможно. Оставшиеся в конце множества A, B объявляем результатом работы.

Алгоритм гарантирует разделённость. Нужно доказать:

с заметной вероятностью получатся большие множества.

Вероятностный алгоритм

Неформальное описание

В алгоритме два параметра α, C (зависят от среднего расстояния c).

1. Ортогонально проектируем точки из множества $X = \{x_v, v \in V\}$ на случайную прямую (задаётся единичным вектором s, равномерно распределённым по сфере S^{m-1}).
2. Отбираем по $\lceil \alpha n \rceil$ точек в крайние множества: «нижнее» и «верхнее». (По величине проекции.)
3. Если нашлась пара точек из разных крайних множеств на расстоянии $\|x_u - x_v\| \leqslant \ell = C \log^{-1/4} n$, то удаляем эти точки.
4. Повторяем шаг 3 пока возможно. Оставшиеся в конце множества A, B объявляем результатом работы.

Алгоритм гарантирует разделённость. Нужно доказать:

с заметной вероятностью получатся большие множества.

Свойства случайных проекций

Проекция $\langle x, s\rangle$ на случайную прямую $\mathbb{R} \cdot s$ ведёт себя аналогично нормальному распределению.

Вероятности больших и малых уклонений

Пусть s берётся по равномерному распределению на сфере S^{m-1}. Тогда для вектора x длины ℓ (обычной, евклидовой) справедливы оценки:

$$\Pr_s[\langle x, s\rangle \leqslant \sigma\ell/\sqrt{m}] < 3\sigma, \qquad \text{при } 0 < \sigma < 1/\sqrt{32};$$

$$\Pr_s[\langle x, s\rangle \geqslant \sigma\ell/\sqrt{m}] < \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right), \quad \text{при } 0 < \sigma.$$

Крайние множества в случайной проекции разделены

Множество точек $X = \{x_v, v \in V\} \subset \mathbb{R}^m$,

$$\sum_{u,v \in V} \|x_u - x_v\|^2 \geqslant cn^2, \qquad \|x_v\| \leqslant 1.$$

Случайное направление $s \leftarrow S^{m-1}$.
Проекция $X_s = \Pi_s X = \{\xi_v : \xi_v = \langle x, s\rangle, x \in X\}$.
Крайние множества $V_{\min}$ ($V_{\max}$) составлены их $\lceil \alpha n \rceil$ самых маленьких (самых больших) проекций.

Лемма о разделении в проекциях

Для любого c существуют такие $\sigma = \sigma(c) = \Omega(\sqrt{c})$ и $\alpha = \alpha(c) = \Omega(c)$, что с вероятностью $p(c) > 0.9$ расстояние между проекциями точек из $V_{\max}$ и $V_{\min}$ не меньше $\sigma/\sqrt{m}$: если $u \in V_{\min}$, $v \in V_{\max}$, то

$$\xi_v - \xi_u \geqslant \frac{\sigma}{\sqrt{m}}.$$

Крайние множества в случайной проекции разделены

Множество точек $X = \{x_v, v \in V\} \subset \mathbb{R}^m$,

$$\sum_{u,v \in V} \|x_u - x_v\|^2 \geqslant cn^2, \qquad \|x_v\| \leqslant 1.$$

Случайное направление $s \leftarrow S^{m-1}$.
Проекция $X_s = \Pi_s X = \{\xi_v : \xi_v = \langle x, s\rangle, x \in X\}$.
Крайние множества $V_{\min}$ ($V_{\max}$) составлены их $\lceil \alpha n \rceil$ самых маленьких (самых больших) проекций.

Лемма о разделении в проекциях

Для любого c существуют такие $\sigma = \sigma(c) = \Omega(\sqrt{c})$ и $\alpha = \alpha(c) = \Omega(c)$, что с вероятностью $p(c) > 0.9$ расстояние между проекциями точек из $V_{\max}$ и $V_{\min}$ не меньше $\sigma/\sqrt{m}$: если $u \in V_{\min}$, $v \in V_{\max}$, то

$$\xi_v - \xi_u \geqslant \frac{\sigma}{\sqrt{m}}\,.$$

Количество пар точек, далёких в проекциях

Зазор между крайними множествами

$$g = \min_{\xi_u \in V_{\min},\ \xi_v \in V_{\max}} \xi_v - \xi_u$$

Проекции точек из $V \setminus (V_{\min} \cup V_{\max})$ находятся на расстоянии $\leqslant g$.
Количество элементов в дополнении к крайним множествам равно $n - 2\lceil \alpha n \rceil$.
Количество пар, проекции которых находятся на расстоянии $\geqslant g$, не больше

$$n^2 - (n - 2\lceil \alpha n \rceil)^2 \leqslant n^2 - (n - 2\alpha n)^2 \leqslant 4\alpha n^2.$$

Докажем, что для малых g количество таких пар велико, отсюда получим оценку на g.

Количество пар точек, далёких в проекциях

Зазор между крайними множествами

$$g = \min_{\xi_u \in V_{\min},\ \xi_v \in V_{\max}} \xi_v - \xi_u$$

Проекции точек из $V \setminus (V_{\min} \cup V_{\max})$ находятся на расстоянии $\leqslant g$. Количество элементов в дополнении к крайним множествам равно $n - 2\lceil \alpha n \rceil$.

Количество пар, проекции которых находятся на расстоянии $\geqslant g$, не больше

$$n^2 - (n - 2\lceil \alpha n \rceil)^2 \leqslant n^2 - (n - 2\alpha n)^2 \leqslant 4\alpha n^2.$$

Докажем, что для малых g количество таких пар велико, отсюда получим оценку на g.

Количество пар точек, далёких в проекциях

Зазор между крайними множествами

$$g = \min_{\xi_u \in V_{\min},\ \xi_v \in V_{\max}} \xi_v - \xi_u$$

Проекции точек из $V \setminus (V_{\min} \cup V_{\max})$ находятся на расстоянии $\leqslant g$.
Количество элементов в дополнении к крайним множествам равно $n - 2\lceil \alpha n \rceil$.
Количество пар, проекции которых находятся на расстоянии $\geqslant g$, не больше

$$n^2 - (n - 2\lceil \alpha n \rceil)^2 \leqslant n^2 - (n - 2\alpha n)^2 \leqslant 4\alpha n^2.$$

Докажем, что для малых g количество таких пар велико, отсюда получим оценку на g.

Количество пар точек, далёких в проекциях

Зазор между крайними множествами

$$g = \min_{\xi_u \in V_{\min},\ \xi_v \in V_{\max}} \xi_v - \xi_u$$

Проекции точек из $V \setminus (V_{\min} \cup V_{\max})$ находятся на расстоянии $\leqslant g$.
Количество элементов в дополнении к крайним множествам равно $n - 2\lceil \alpha n \rceil$.
Количество пар, проекции которых находятся на расстоянии $\geqslant g$, не больше

$$n^2 - (n - 2\lceil \alpha n \rceil)^2 \leqslant n^2 - (n - 2\alpha n)^2 \leqslant 4\alpha n^2.$$

Докажем, что для малых g количество таких пар велико, отсюда получим оценку на g.

Количество далёких пар точек

Утверждение

$F = \{(u,v) : \|x_u - x_v\|^2 \geqslant c/2\}$ — множество далёких пар.
Доля F среди всех пар не меньше $c/(8-c)$.

Доказательство как в неравенстве Маркова

$\|x_u\| \leqslant 1$, поэтому $\|x_u - x_v\|^2 \leqslant 4$.
Если доля множества F равна ν, то

$$c \leqslant 4\nu + \frac{c}{2} \cdot (1-\nu),$$

т.е.

$$\nu \geqslant \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{4 - c/2} = \frac{c}{8-c}.$$

Количество далёких пар точек

Утверждение

$F = \{(u,v) : \|x_u - x_v\|^2 \geqslant c/2\}$ — множество далёких пар.
Доля F среди всех пар не меньше $c/(8-c)$.

Доказательство как в неравенстве Маркова

$\|x_u\| \leqslant 1$, поэтому $\|x_u - x_v\|^2 \leqslant 4$.
Если доля множества F равна ν, то

$$c \leqslant 4\nu + \frac{c}{2} \cdot (1-\nu),$$

т.е.

$$\nu \geqslant \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{4 - c/2} = \frac{c}{8-c} .$$

Далёких пар, близких в проекциях, немного

Вероятность малого уклонения для далёкой пары:

$$\Pr_s \left[|\xi_u - \xi_v| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{\frac{c}{2}} \right] < 3\varepsilon.$$

Математическое ожидание доли тех далёких пар, расстояние между проекциями которых не более $\varepsilon/\sqrt{m} \cdot \sqrt{c/2}$, меньше 3ε. Поэтому из неравенства Маркова следует, что с вероятностью $\geqslant 1 - 6\varepsilon$ доля таких неудачных далёких пар не больше $1/2$.

Значит, с вероятностью $\geqslant 1 - 6\varepsilon$ по крайней мере

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{8 - c} \cdot n^2$$

пар проекций находятся на расстоянии не меньше $\varepsilon/\sqrt{m} \cdot \sqrt{c/2}$. Если

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{8 - c} > 4\alpha,$$

из предыдущей верхней оценки получаем, что $g \geqslant \varepsilon/\sqrt{m} \cdot \sqrt{c/2}$.

Далёких пар, близких в проекциях, немного

Вероятность малого уклонения для далёкой пары:

$$\Pr_s\left[|\xi_u - \xi_v| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{\frac{c}{2}}\right] < 3\varepsilon.$$

Математическое ожидание доли тех далёких пар, расстояние между проекциями которых не более $\varepsilon/\sqrt{m} \cdot \sqrt{c/2}$, меньше 3ε. Поэтому из неравенства Маркова следует, что с вероятностью $\geqslant 1 - 6\varepsilon$ доля таких неудачных далёких пар не больше $1/2$.

Значит, с вероятностью $\geqslant 1 - 6\varepsilon$ по крайней мере

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{8-c} \cdot n^2$$

пар проекций находятся на расстоянии не меньше $\varepsilon/\sqrt{m} \cdot \sqrt{c/2}$. Если

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{8-c} > 4\alpha,$$

из предыдущей верхней оценки получаем, что $g \geqslant \varepsilon/\sqrt{m} \cdot \sqrt{c/2}$.

Далёких пар, близких в проекциях, немного

Вероятность малого уклонения для далёкой пары:

$$\Pr_s\left[|\xi_u - \xi_v| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{\frac{c}{2}}\right] < 3\varepsilon.$$

Математическое ожидание доли тех далёких пар, расстояние между проекциями которых не более $\varepsilon/\sqrt{m} \cdot \sqrt{c/2}$, меньше 3ε. Поэтому из неравенства Маркова следует, что с вероятностью $\geqslant 1 - 6\varepsilon$ доля таких неудачных далёких пар не больше $1/2$.
Значит, с вероятностью $\geqslant 1 - 6\varepsilon$ по крайней мере

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{8-c} \cdot n^2$$

пар проекций находятся на расстоянии не меньше $\varepsilon/\sqrt{m} \cdot \sqrt{c/2}$. Если

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{8-c} > 4\alpha,$$

из предыдущей верхней оценки получаем, что $g \geqslant \varepsilon/\sqrt{m} \cdot \sqrt{c/2}$.

Лемма о разделении пар в проекциях (завершение)

Выбираем $\varepsilon < 1/60$. Тогда

- вероятность большого зазора > 0.9,
- нормированная на $\sqrt{m}$ величина зазора σ не меньше $(\varepsilon/\sqrt{2}) \cdot \sqrt{c} = \Omega(\sqrt{c})$,
- доля α крайнего множества в общем числе точек не меньше $c/(64 - c) \geqslant c/60 = \Omega(c)$.

Слабая оценка точности релаксации

Пусть $\ell^2 = \frac{\sigma}{6} \cdot (\ln n)^{-1}$.
Вероятности больших уклонений для проекций близких пар u, v (на расстоянии $\leqslant \ell$)

$$\mathbf{Pr}\left[|\xi_u - \xi_v| \geqslant \sigma/\sqrt{m}\right] < 2e^{-\sigma^2/(2\ell^2)} < 2e^{-3\ln n} = \frac{2}{n^3}.$$

С вероятностью $1 - o(n)$ проекции всех пар близких точек находятся ближе друг к другу, чем величина зазора между крайними множествами. Поэтому шаг 4 алгоритма вообще не выполняется и получили пару больших разделённых множеств.

Но точность $O(\log n)$ мы уже получили для всех полуметрик из теоремы Бургейна.

При $\ell^2 = K \cdot (\ln n)^{-1/2}$ с большой вероятностью будут близкие пары в разных крайних множествах.

Нужна более точная оценка, использующая свойства метрики негативного типа.

Слабая оценка точности релаксации

Пусть $\ell^2 = \frac{\sigma}{6} \cdot (\ln n)^{-1}$.
Вероятности больших уклонений для проекций близких пар u, v (на расстоянии $\leqslant \ell$)

$$\mathbf{Pr}\left[|\xi_u - \xi_v| \geqslant \sigma/\sqrt{m}\right] < 2e^{-\sigma^2/(2\ell^2)} < 2e^{-3\ln n} = \frac{2}{n^3}.$$

С вероятностью $1 - o(n)$ проекции всех пар близких точек находятся ближе друг к другу, чем величина зазора между крайними множествами. Поэтому шаг 4 алгоритма вообще не выполняется и получили пару больших разделённых множеств.

Но точность $O(\log n)$ мы уже получили для всех полуметрик из теоремы Бургейна.

При $\ell^2 = K \cdot (\ln n)^{-1/2}$ с большой вероятностью будут близкие пары в разных крайних множествах.

Нужна более точная оценка, использующая свойства метрики негативного типа.

Слабая оценка точности релаксации

Пусть $\ell^2 = \frac{\sigma}{6} \cdot (\ln n)^{-1}$.
Вероятности больших уклонений для проекций близких пар u, v (на расстоянии $\leqslant \ell$)

$$\mathbf{Pr}\left[|\xi_u - \xi_v| \geqslant \sigma/\sqrt{m}\right] < 2e^{-\sigma^2/(2\ell^2)} < 2e^{-3\ln n} = \frac{2}{n^3}.$$

С вероятностью $1 - o(n)$ проекции всех пар близких точек находятся ближе друг к другу, чем величина зазора между крайними множествами. Поэтому шаг 4 алгоритма вообще не выполняется и получили пару больших разделённых множеств.
Но точность $O(\log n)$ мы уже получили для всех полуметрик из теоремы Бургейна.
При $\ell^2 = K \cdot (\ln n)^{-1/2}$ с большой вероятностью будут близкие пары в разных крайних множествах.
Нужна более точная оценка, использующая свойства метрики негативного типа.

Вероятность успеха алгоритма

Оцениваем вероятность того, что из крайнего множества на шаге 3 алгоритма удаляется не более половины пар.

Для $s \in S^{m-1}$ определим ориентированный граф $G(s) = G_\ell(V_{\max}(s), V_{\min}(s))$, рёбра соединяют те пары вершин $u \in V_{\max}$, $v \in V_{\min}$, для которых $\|x_u - x_v\| \leqslant \ell$, а $\xi_u - \xi_v \geqslant \sigma/\sqrt{m}$.

(То есть точки близки в пространстве, но их проекции сравнительно далеки).

Сколько раз исполнится шаг 3 алгоритма? Не больше, чем размер максимального паросочетания $M(s)$ в графе $G(s)$.

Зафиксируем для каждого направления $s \in S^{m-1}$ какое-нибудь одно максимальное паросочетание $M(s)$.

Потребуем, чтобы $M(-s)$ получалось из $M(s)$ обращением стрелок (неориентированное паросочетание одно и то же). В остальном выбор между разными максимальными паросочетаниями произвольный.

Пусть $q = \mathbf{Pr}_{s \in S^{m-1}}\left[|M(s)| > \alpha n/2\right]$. Нам нужно отделить эту вероятность от 1.

Вероятность успеха алгоритма

Оцениваем вероятность того, что из крайнего множества на шаге 3 алгоритма удаляется не более половины пар.
Для $s \in S^{m-1}$ определим ориентированный граф $G(s) = G_\ell(V_{\max}(s), V_{\min}(s))$, рёбра соединяют те пары вершин $u \in V_{\max}$, $v \in V_{\min}$, для которых $\|x_u - x_v\| \leqslant \ell$, а $\xi_u - \xi_v \geqslant \sigma/\sqrt{m}$.
(То есть точки близки в пространстве, но их проекции сравнительно далеки).
Сколько раз исполнится шаг 3 алгоритма? Не больше, чем размер максимального паросочетания $M(s)$ в графе $G(s)$.
Зафиксируем для каждого направления $s \in S^{m-1}$ какое-нибудь одно максимальное паросочетание $M(s)$.
Потребуем, чтобы $M(-s)$ получалось из $M(s)$ обращением стрелок (неориентированное паросочетание одно и то же). В остальном выбор между разными максимальными паросочетаниями произвольный.
Пусть $q = \mathbf{Pr}_{s \in S^{m-1}}\left[|M(s)| > \alpha n/2\right]$. Нам нужно отделить эту вероятность от 1.

Вероятность успеха алгоритма

Оцениваем вероятность того, что из крайнего множества на шаге 3 алгоритма удаляется не более половины пар.

Для $s \in S^{m-1}$ определим ориентированный граф $G(s) = G_\ell(V_{\max}(s), V_{\min}(s))$, рёбра соединяют те пары вершин $u \in V_{\max}$, $v \in V_{\min}$, для которых $\|x_u - x_v\| \leqslant \ell$, а $\xi_u - \xi_v \geqslant \sigma/\sqrt{m}$. (То есть точки близки в пространстве, но их проекции сравнительно далеки).

Сколько раз исполнится шаг 3 алгоритма? Не больше, чем размер максимального паросочетания $M(s)$ в графе $G(s)$.

Зафиксируем для каждого направления $s \in S^{m-1}$ какое-нибудь одно максимальное паросочетание $M(s)$.

Потребуем, чтобы $M(-s)$ получалось из $M(s)$ обращением стрелок (неориентированное паросочетание одно и то же). В остальном выбор между разными максимальными паросочетаниями произвольный.

Пусть $q = \mathbf{Pr}_{s \in S^{m-1}}\left[|M(s)| > \alpha n/2\right]$. Нам нужно отделить эту вероятность от 1.

Вероятность успеха алгоритма

Оцениваем вероятность того, что из крайнего множества на шаге 3 алгоритма удаляется не более половины пар.
Для $s \in S^{m-1}$ определим ориентированный граф $G(s) = G_\ell(V_{\max}(s), V_{\min}(s))$, рёбра соединяют те пары вершин $u \in V_{\max}$, $v \in V_{\min}$, для которых $\|x_u - x_v\| \leqslant \ell$, а $\xi_u - \xi_v \geqslant \sigma/\sqrt{m}$.
(То есть точки близки в пространстве, но их проекции сравнительно далеки).
Сколько раз исполнится шаг 3 алгоритма? Не больше, чем размер максимального паросочетания $M(s)$ в графе $G(s)$.
Зафиксируем для каждого направления $s \in S^{m-1}$ какое-нибудь одно максимальное паросочетание $M(s)$.
Потребуем, чтобы $M(-s)$ получалось из $M(s)$ обращением стрелок (неориентированное паросочетание одно и то же). В остальном выбор между разными максимальными паросочетаниями произвольный.
Пусть $q = \mathbf{Pr}_{s \in S^{m-1}}\left[|M(s)| > \alpha n/2\right]$. Нам нужно отделить эту вероятность от 1.

Вероятность успеха алгоритма

Оцениваем вероятность того, что из крайнего множества на шаге 3 алгоритма удаляется не более половины пар.
Для $s \in S^{m-1}$ определим ориентированный граф $G(s) = G_\ell(V_{\max}(s), V_{\min}(s))$, рёбра соединяют те пары вершин $u \in V_{\max}$, $v \in V_{\min}$, для которых $\|x_u - x_v\| \leqslant \ell$, а $\xi_u - \xi_v \geqslant \sigma/\sqrt{m}$. (То есть точки близки в пространстве, но их проекции сравнительно далеки).
Сколько раз исполнится шаг 3 алгоритма? Не больше, чем размер максимального паросочетания $M(s)$ в графе $G(s)$.
Зафиксируем для каждого направления $s \in S^{m-1}$ какое-нибудь одно максимальное паросочетание $M(s)$.
Потребуем, чтобы $M(-s)$ получалось из $M(s)$ обращением стрелок (неориентированное паросочетание одно и то же). В остальном выбор между разными максимальными паросочетаниями произвольный.
Пусть $q = \mathbf{Pr}_{s \in S^{m-1}} \left[|M(s)| > \alpha n/2\right]$. Нам нужно отделить эту вероятность от 1.

Извлечение колобка

Выделим в множестве $X = \{x_v\}$, $v \in V$, «изотропное» подмножество (колобок, core).

Для подмножества $Y \subseteq X$ и $x_v \in Y$ определим вероятность $p_Y(x_v)$ того, что v является концом ребра $(u, v) \in M(s)$ для случайно выбранного направления $s \in S^{m-1}$, причём начало ребра u также лежит в Y.

С той же вероятностью $p_Y(x_v)$ точка x_v является началом ребра $(v, u) \in M(s)$, $u \in Y$. (Симметрия $s \mapsto -s$.)

Строим убывающую последовательность

$$\{x_v\} = X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X'.$$

Множество X_{k+1} получаем из X_k выбрасыванием такой точки, что $p_{X_k}(x_v) < q\alpha/4$. Процесс заканчивается, если таких точек нет.

Извлечение колобка

Выделим в множестве $X = \{x_v\}$, $v \in V$, «изотропное» подмножество (колобок, core).
Для подмножества $Y \subseteq X$ и $x_v \in Y$ определим вероятность $p_Y(x_v)$ того, что v является концом ребра $(u, v) \in M(s)$ для случайно выбранного направления $s \in S^{m-1}$, причём начало ребра u также лежит в Y.
С той же вероятностью $p_Y(x_v)$ точка x_v является началом ребра $(v, u) \in M(s)$, $u \in Y$. (Симметрия $s \mapsto -s$.)
Строим убывающую последовательность

$$\{x_v\} = X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X'.$$

Множество X_{k+1} получаем из X_k выбрасыванием такой точки, что $p_{X_k}(x_v) < q\alpha/4$. Процесс заканчивается, если таких точек нет.

Извлечение колобка

Выделим в множестве $X = \{x_v\}$, $v \in V$, «изотропное» подмножество (колобок, core).

Для подмножества $Y \subseteq X$ и $x_v \in Y$ определим вероятность $p_Y(x_v)$ того, что v является концом ребра $(u, v) \in M(s)$ для случайно выбранного направления $s \in S^{m-1}$, причём начало ребра u также лежит в Y.

С той же вероятностью $p_Y(x_v)$ точка x_v является началом ребра $(v, u) \in M(s)$, $u \in Y$. (Симметрия $s \mapsto -s$.)

Строим убывающую последовательность

$$\{x_v\} = X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X'.$$

Множество X_{k+1} получаем из X_k выбрасыванием такой точки, что $p_{X_k}(x_v) < q\alpha/4$. Процесс заканчивается, если таких точек нет.

Свойства полученного множества (колобка)

Оно непусто, $X' \neq \varnothing$

Сумма вероятностей $p_X(x_v)$ для множества X_0 велика:

$$\sum_{v \in V} p_{X_0}(x_v) > q\alpha n/2 \,,$$

(с вероятностью q паросочетание $M(s)$ даёт вклад в $> \alpha n/2$ точек).
На каждом шаге (их не больше n) эта сумма вероятностей уменьшается на $< 2 \cdot q\alpha/4 = q\alpha/2$ (теряется вероятность отбрасываемой точки быть концом ребра и быть началом ребра в паросочетании $M(s)$, ограниченном на X_k).

Все точки часто паросочетаются, $p_{X'}(x_v) \geqslant q\alpha/4$

По построению последовательности.

Свойства полученного множества (колобка)

Оно непусто, $X' \neq \varnothing$

Сумма вероятностей $p_X(x_v)$ для множества X_0 велика:

$$\sum_{v \in V} p_{X_0}(x_v) > q\alpha n/2 ,$$

(с вероятностью q паросочетание $M(s)$ даёт вклад в $> \alpha n/2$ точек). На каждом шаге (их не больше n) эта сумма вероятностей уменьшается на $< 2 \cdot q\alpha/4 = q\alpha/2$ (теряется вероятность отбрасываемой точки быть концом ребра и быть началом ребра в паросочетании $M(s)$, ограниченном на X_k).

Все точки часто паросочетаются, $p_{X'}(x_v) \geqslant q\alpha/4$

По построению последовательности.

Формальное определение

(σ, δ, ℓ)-колобок (core)

Такое $X \subset \mathbb{R}^m$, для которого существует система паросочетаний $M(s)$, $s \in S^{m-1}$, со свойствами:

- для любых $s \in S^{d-1}$ и $(x, y) \in M(s)$ выполняются неравенства $\langle x - y, s \rangle \geqslant \sigma/\sqrt{m}$ и $\|x - y\| \leqslant \ell$;
- $\mathbf{Pr}_{s \in S^{d-1}}[\exists x : (x, y) \in M(s)] \geqslant \delta$ для любого $y \in X$.

Пример из анализа алгоритма

Построенное множество X' является $(\sigma, q\alpha/4, \ell)$-колобком.

Формальное определение

(σ, δ, ℓ)-колобок (core)

Такое $X \subset \mathbb{R}^m$, для которого существует система паросочетаний $M(s)$, $s \in S^{m-1}$, со свойствами:

- для любых $s \in S^{d-1}$ и $(x, y) \in M(s)$ выполняются неравенства $\langle x - y, s \rangle \geqslant \sigma/\sqrt{m}$ и $\|x - y\| \leqslant \ell$;
- $\mathbf{Pr}_{s \in S^{d-1}}[\exists x : (x, y) \in M(s)] \geqslant \delta$ для любого $y \in X$.

Пример из анализа алгоритма

Построенное множество X' является $(\sigma, q\alpha/4, \ell)$-колобком.

Теорема о большом колобке с негативной метрикой

Теорема (J.R.Lee)

Пусть X — (σ, δ, ℓ)-колобок, $0 < \sigma, \delta \leqslant 1/2$, причём функция $\|x - y\|^2$ является метрикой на X. Тогда

$$|X| = \exp\left(\Omega\left(\frac{\sigma^4}{\ell^4 \log^2(1/\delta)}\right)\right).$$

Вывод ARV теоремы из теоремы о большом колобке

При фиксированных σ, δ колобок на N точках имеет параметр длины $\ell = \Omega_{\sigma,\delta}(\log^{-1/4} N)$.

Константы σ, α зафиксированы в доказательстве леммы о разделении в проекциях.

Выберем $q = 0.4$ и такой $\ell = \beta \log^{-1/4} n$, чтобы не существовало $(\sigma, q\alpha/2, \ell)$-колобка на n вершинах. (Возможно при достаточно малой константе β.)

Тогда с вероятностью > 0.5 в конце работы алгоритма получим большие разделённые множества, из примерно $\alpha n/2$ элементов каждое.

Вывод ARV теоремы из теоремы о большом колобке

При фиксированных σ, δ колобок на N точках имеет параметр длины $\ell = \Omega_{\sigma,\delta}(\log^{-1/4} N)$.
Константы σ, α зафиксированы в доказательстве леммы о разделении в проекциях.
Выберем $q = 0.4$ и такой $\ell = \beta \log^{-1/4} n$, чтобы не существовало $(\sigma, q\alpha/2, \ell)$-колобка на n вершинах. (Возможно при достаточно малой константе β.)
Тогда с вероятностью > 0.5 в конце работы алгоритма получим большие разделённые множества, из примерно $\alpha n/2$ элементов каждое.

Вывод ARV теоремы из теоремы о большом колобке

При фиксированных σ, δ колобок на N точках имеет параметр длины $\ell = \Omega_{\sigma,\delta}(\log^{-1/4} N)$.
Константы σ, α зафиксированы в доказательстве леммы о разделении в проекциях.
Выберем $q = 0.4$ и такой $\ell = \beta \log^{-1/4} n$, чтобы не существовало $(\sigma, q\alpha/2, \ell)$-колобка на n вершинах. (Возможно при достаточно малой константе β.)
Тогда с вероятностью > 0.5 в конце работы алгоритма получим большие разделённые множества, из примерно $\alpha n/2$ элементов каждое.

Вывод ARV теоремы из теоремы о большом колобке

При фиксированных σ, δ колобок на N точках имеет параметр длины $\ell = \Omega_{\sigma,\delta}(\log^{-1/4} N)$.
Константы σ, α зафиксированы в доказательстве леммы о разделении в проекциях.
Выберем $q = 0.4$ и такой $\ell = \beta \log^{-1/4} n$, чтобы не существовало $(\sigma, q\alpha/2, \ell)$-колобка на n вершинах. (Возможно при достаточно малой константе β.)
Тогда с вероятностью > 0.5 в конце работы алгоритма получим большие разделённые множества, из примерно $\alpha n/2$ элементов каждое.