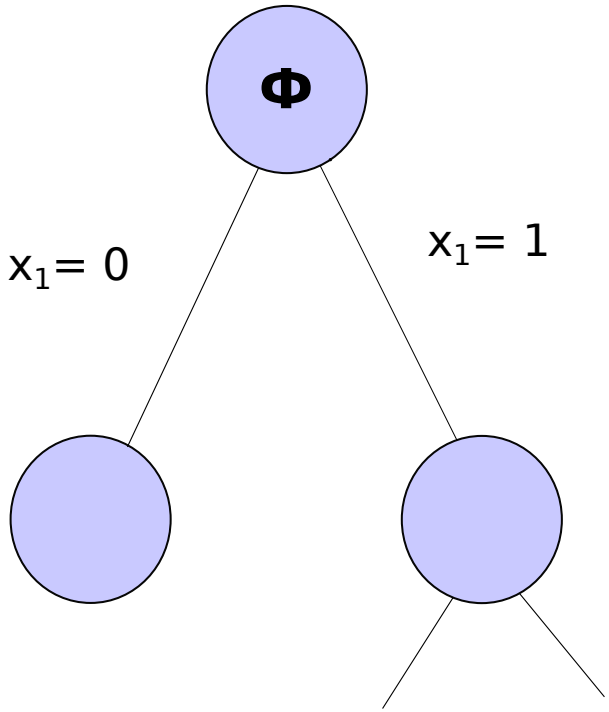
Вероятностные DPLL алгоритмы с отсечением

Елена Иконникова

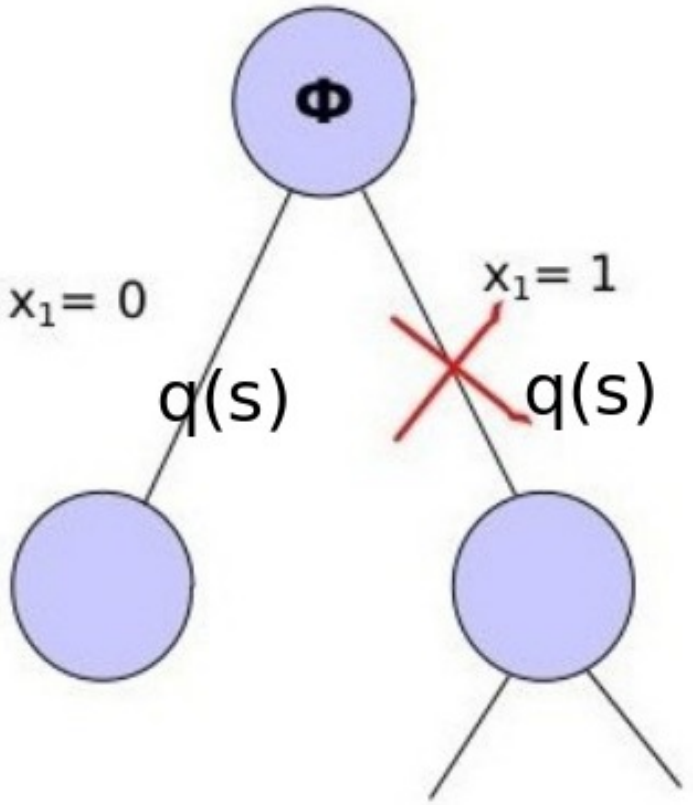
DPLL алгоритмы

"Расщепление" по каждой переменной.



Отсечение

Ребра помечены вероятностью их отсечения.



DPLL алгоритм с отсечением

- **A** — выбирает переменную для расщепления
- **B** — выбирает первое присваиваемое этой переменной значение
- **C** — ”обрезает ветви” дерева расщепления

DPLL алгоритм с отсечением

Вход: Φ — формула в КНФ.
if Φ не содержит ни одного дизъюнкта **then return** 1
end if
if Φ содержит пустой дизъюнкт **then return** 0
end if
$x \leftarrow \mathbf{A}(\Phi)$
$c \leftarrow \mathbf{B}(\Phi, x)$
if $\mathbf{C}(\Phi, x, c) = 1$ **then**
    if $\mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}}(\Phi[x := c]) = 1$ **then return** 1
    end if
end if
if $\mathbf{C}(\Phi, x, 1 - c) = 1$ **then**
    if $\mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}}(\Phi[x := 1 - c]) = 1$ **then return** 1
    end if
end if
return 0

Обзор темы

Dmitry Itsykson and Dmitry Sokolov Lower bounds for myopic DPLL algorithms with a cut heuristic.

Близорукая процедура — имеющая доступ к формуле с удаленными символами отрицания.

Теорема

Существует алгоритм, строящий за полиномиальное от n время невыполнимую формулу $\Phi^{(n)}$. Существует $\delta > 0$, т.ч. для любых близоруких полиномиальных $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{C}$ *существует семейство распределений R_n на выполнимых формулах, такое что если для нек.* $\mathbf{B}$ *и* $\varepsilon > 0$

$$Pr_{\phi \leftarrow R_n}[\mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}}(\phi) = 1] \geq 1 - \varepsilon,$$

то время работы $\mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}}(\Phi)$ не менее $(1-\varepsilon)2^N$, где $N = \min\{n^\delta, r/K\}$ и $r = \Omega(n)$. При этом такое семейство распределений можно построить за полиномиальное время.

Наши эвристики

- **A** — детерминированная
- **B** — выбирает 0 или 1 с равной вероятностью
- **C** — обрезает ребро уровня s с вероятностью $q(s)$. ("пьяная" эвристика)

Основной результат "неформально"

Trade-off:

- Либо алгоритм "слишком часто" ошибается...
- либо он "слишком часто" работает долго.

Экспандеры

G — двудольный граф, X, Y — его доли.

Определение

Пусть $I \subseteq Y$. $\delta(I)$ — это множество вершин из X, соединенных ровно с одной вершиной из I и ровно одним ребром.

Определение

Граф G называется $(r; d; c)$-*граничным экспандером*, если

- $\forall y \in Y \ deg(y) \leq d$
- $\forall I \subseteq Y$, т. ч. $|I| \leq r$, $\delta(I) \geq c|I|$

Замыкание и его свойства

Определение

Пусть G — (r, d, c)-граничный экспандер, $J \subseteq X$. *Замыканием* множества J называется максимальное по включению множество $I \subseteq Y$, т. ч. $|I| \leq r$ и $\delta(I) \subseteq J$.
Обозначение: $Cl(J)$ — лексикографически первое замыкание J

Лемма

Пусть I — замыкание J, тогда $|I| \leq \frac{|J|}{c}$

Следствие

Пусть $c > 1$, $J \subseteq X$, $|J| < r/2$. Тогда замыкание J определяется единственным образом.

Формулы, основанные на экспандерах

Пусть G — (r, d, c)-граничный экспандер с n вершинами в каждой доле, $c > 2$, A — матрица смежности (над $\mathbb{F}_2$). Пусть

- Φ — формула, соответствующая системе $Ax = b$
- Φ имеет единственную выполняющую подстановку.

Локальная корректность

Определение

Частичная подстановка ρ для переменных из x называется локально корректной, если $|\rho| < r/2$ и система $Ax|_I = b|_I$, где $I = Cl(vars(\rho))$, имеет решение, согласованное с ρ.

Случай без правил упрощения

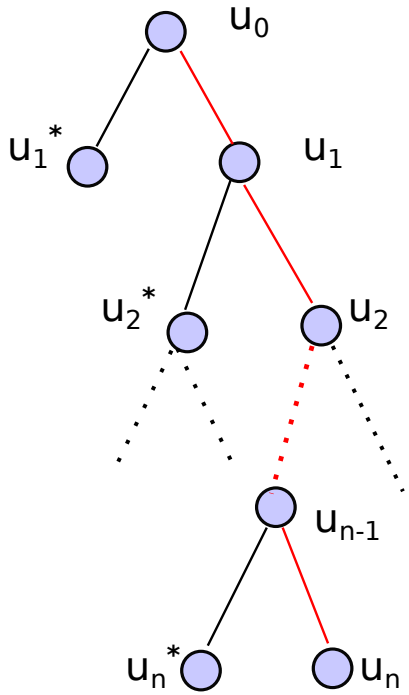
Пусть $\mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}}$ не применяет правил упрощения формулы.
T — дерево расщепления для формулы Ф.
Правильный путь от дерева к листу в T — соответствующий выполняющей подстановке. Доходит до конца с вероятностью

$$P = \prod_{j=1}^{n-1} p(j),$$

где $p(j) = 1 - q(j)$ — вероятность, с которой ветвь "выживает" на j-м шаге. Предположим, что $P > 1 - \varepsilon$.

Правильный путь

- u_s — вершины правильного пути
- u^*_{s+1} — их потомки, не лежащие на правильном пути



Преобразуем дерево...

$$T \rightsquigarrow T'$$

(удалили поддеревья, корни которых "не локально корректны")

Лемма

В T' длина каждого пути от корня к листу, не лежащему на правильном пути, не менее $r/2 - 1$.

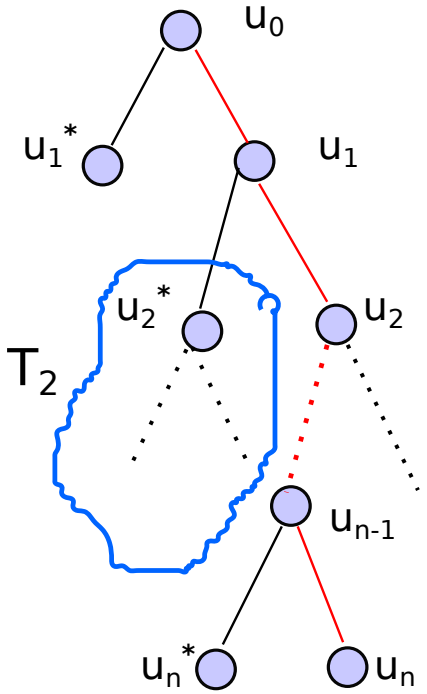
Лемма

На любом пути от корня к листу в T' по крайней мере половина из первых $r/2 - 3$ вершин имеют двух прямых потомков (являются точками расщепления).

"Большие" поддеревья

Следствие

Пусть T_{s+1} *— поддерево в* T *с корнем* u^*_{s+1}*, По крайней мере* $r/16 - 1$ *из деревьев* T_{s+1} *имеет размер порядка* $2^{\Omega(r)}$



"Большие" поддеревья

Следствие

Пусть T_{s+1} — поддерево в T с корнем u^*_{s+1}, По крайней мере $r/16 - 1$ из деревьев T_{s+1} имеет размер порядка $2^{\Omega(r)}$

Доказательство.

Среди вершин u_s, $s \in \{0, \dots r/8 - 4\}$, хотя бы $r/16 - 2$ — точки расщепления в T' (соотвествующие им деревья T'_{s+1} непусты).
Докажем: в любом из этих деревьев на каждом пути от корня к листу будет не менее $r/8 + 1$ точек расщепления.
Путь от корня к листу в поддереве — это кусок некоторого пути от корня к листу в дереве T. Если другая часть этого "длинного" пути — длины не более $r/8 - 3$, то на путь в поддереве приходится не менее $r/8 + 1$ вершин с двумя потомками. □

"Большие" поддеревья

Лемма

Пусть W *— число вершин в* T_{s+1}. *Тогда условная вероятность* $Pr[\mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}}$ *посетил* $> \frac{W}{2}$ *вершин* $T_{s+1} \mid \mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}}$ *посетил* $u_s^*]$ *больше* $1 - 2\varepsilon$

"Большие" поддеревья

Лемма

Пусть W *— число вершин в* T_{s+1}. *Тогда условная вероятность* $Pr[\mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}}$ *посетил* $> \frac{W}{2}$ *вершин* $T_{s+1} \mid \mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}}$ *посетил* $u_s^*]$ *больше* $1 - 2\varepsilon$

Доказательство.

$$Pr[\text{алгоритм } \mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}} \text{ посетил } w | \text{он посетил } u_s^*] =$$

$$= p(s) \cdot \ldots \cdot p(s+i-1) \geq 1 - \varepsilon$$

По неравенству Маркова

$$Pr[\text{не посещенных вершин } > \mu\varepsilon W | \mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}} \text{ посетил } u_s^*] \leq \frac{1}{\mu}$$

Возъмём $\mu = \frac{1}{2\varepsilon}$ □

Основной результат

Теорема

Если алгоритм $\mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}}$ *с вероятностью, большей* $(1-\varepsilon)$, *выдает правильный ответ на формуле* Φ, *то с вероятностью не менее* $(1-2\varepsilon)(1-2^{-\Omega(r)})$ *его время работы на* Φ *не менее* $2^{\Omega(r)}$.

Основной результат

Теорема

Если алгоритм $\mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}}$ с вероятностью, большей $(1-\varepsilon)$, выдает правильный ответ на формуле Φ, то с вероятностью не менее $(1-2\varepsilon)(1-2^{-\Omega(r)})$ его время работы на Φ не менее $2^{\Omega(r)}$.

Доказательство.

1. С вероятностью $1-2^{-\Omega(r)}$ алгоритм заходит в поддерево T_{s+1}.
2. С вероятностью не менее $1-2\varepsilon$ он посещает в этом дереве $2^{\Omega(r)}$ вершин.

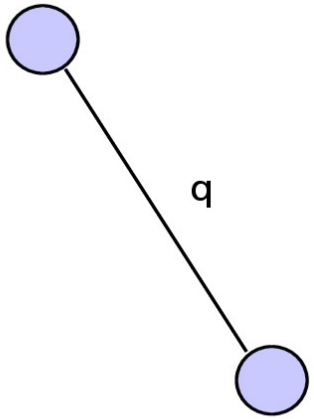
□

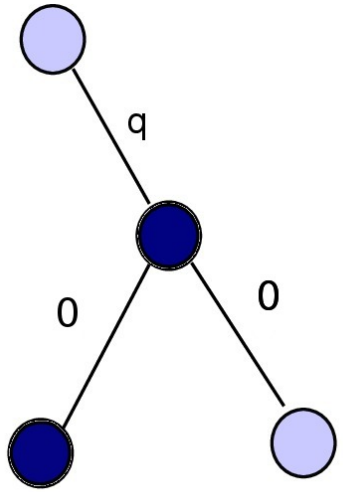
Случай с использованием упрощений

Пусть теперь $\mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}}$ использует правило единичных дизъюнктов.

Построим $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{A}',\mathbf{B},\mathbf{C}'}$, не использующий правил упрощения.

$$T \rightsquigarrow \widehat{T}$$





Преобразуем дерево...

Снова оставляем только вершины с локально корректными подстановками.

$$\widehat{T} \rightsquigarrow \widehat{T}'$$

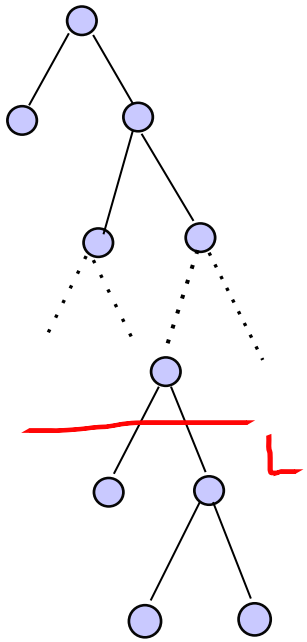
Длина правильного пути

Лемма

Пусть L — длина правильного пути в T. Тогда $L \geq r/4 - 2$.

$$\widehat{T}' \rightsquigarrow \widetilde{T}$$

Обрежем все ветви $\widehat{T}'$ по уровню L.



Основной результат при использовании правил упрощения

Лемма

$\Omega(r)$ из деревьев $\widetilde{T}_{s+1}$ имеет размер порядка $2^{\Omega(r)}$

Лемма

$\widehat{T}$ не более чем в n раз больше T.

Теорема

Если алгоритм $\mathcal{D}_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}}$ с вероятностью, большей $(1-\varepsilon)$, выдает правильный ответ на формуле Φ, то с вероятностью не менее $(1-2\varepsilon)(1-2^{-\Omega(r)})$ его время работы на Φ не менее $2^{\Omega(r)}$.

Спасибо за внимание!