Математические основы Computer Science Часть 2: Вероятностный метод. Лекция 6.

Дмитрий Ицыксон

ПОМИ РАН

8 ноября 2009

Содержание лекции

1. Случайная величина. Математическое ожидание.
2. Линейность математического ожидания. Принцип усреднения.
3. Турнир с большим количеством гамильтоновых путей.
4. Метод малых вариаций: независимое множество.
5. Лемма о скрещиваниях.
6. MAX-3-SAT

Литература

1. Н. Алон, Дж. Спенсер. Вероятностный метод.
2. М. Айгнер, Г. Циглер. Доказательства из Книги.

Случайная величина и математическое ожидание

Определение. (Ω, p) — конечное вероятностное пространство. Случайной величиной называется отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.

- Случайная величина индуцирует вероятностную меру μ на $\mathbb{R}, \mathcal{B}$: $\mu(A) = p(\xi^{-1}(A))$.
- Зная меру μ можно "забыть"про вероятностное пространство. $\Pr\{\xi \in A\} = \mu(A)$.

Определение. ξ — случайная величина, μ — мера, индуцированная ξ. Математическим ожиданием ξ называется $\mathrm{E}\,\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)p(\omega)$.

- Если μ конечная вероятностная мера, при которой $\mu(A_1) = p_1, \ldots, \mu(A_n) = p_n$, то $\mathrm{E}\,\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)p(\omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i A_i$.

Основные свойства математического ожидания

- Теорема. (Принцип усреднения). ξ — случайная величина, $\mathsf{E}\,\xi = m$, тогда $\Pr\{\xi \geq m\} > 0$.
  Доказательство.
  - Пусть ξ принимает значения A_1 с вероятностью p_1, A_2 с вероятностью $p_2, \ldots$, A_n с вероятностью p_n, где $p_i > 0, \sum p_i = 1$.
  - Если все $A_i < m$, то $m = p_1 A_1 + p_2 A_2 + \cdots + p_n A_n < p_1 m + p_2 m + \cdots + p_n m = m$. Противоречие!
- Теорема. (Линейность математического ожидания) $\xi = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathsf{E}\,\xi = \alpha\,\mathsf{E}\,\xi_1 + \beta\,\mathsf{E}\,\xi_2$.
  Доказательство. $\mathsf{E}\,\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)p(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega}(\alpha\xi_1(\omega) + \beta\xi_2(\omega))p(\omega) = \alpha\,\mathsf{E}\,\xi_1 + \beta\,\mathsf{E}\,\xi_2$.

Турнир с большим числом гамильтоновых путей

- Турниром называется ориентированный граф между любыми двумя вершинами которых есть ровно одно ориентированное ребро.
- Гамильтонов путь — путь проходящий по всем вершинам ровно 1 раз.
- $\Omega = \{G_1, G_2, \dots, G_{2^{C_n^2}}\}$ — множество всех турниров на n вершинах, все турниры равновероятны.
- σ — перестановка чисел от 1 до n.

  $$X_\sigma(G) = \begin{cases} 1, \text{если } \sigma \text{ задает г.п. в } G \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$
- $X = \sum_\sigma X_\sigma$ — число гамильтоновых путей в случайном графе.
- $\mathrm{E}\, X = \sum_\sigma \mathrm{E}\, X_\sigma = \frac{n!}{2^{n-1}}$.
- Значит, существует турнир в котором не меньше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

Метод малых вариаций

- $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества в графе G (множество вершин без ребер между ними).
- Теорема. В графе n вершин и $\frac{dn}{2}$ ребер. Тогда $\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$.
  Доказательство.
  - S — случайное множество, $\Pr[v \in S] = p$
  - $X = |S|$, $EX = np$
  - Y — число ребер, оба конца лежит в S.
  - $EY = \sum_{e \in E} E(Y_e) = \frac{nd}{2} p^2$
  - $E(X - Y) = np - \frac{dn}{2} p^2$, максимально при $p = \frac{1}{d}$.
  - Существует S, что $X - Y \geq \frac{n}{2d}$
  - Удалим как минимум один конец каждого ребра. Останется $\geq \frac{nd}{2}$ вершин.

Планарные графы

- Изображение графа на плоскости: вершины точки плоскости, ребра ломанные линии.
- Планарный (плоский) граф: можно изобразить на плоскости так, чтобы ребра не пересекались по внутренним точкам.
- Формула Эйлера для связного планарного графа: $V - E + F = 2$.
- $F = F_3 + F_4 + F_5 + \dots$
- $2E = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$
- $3F \leq 2E$
- $3E = 3V + 3F - 6 \leq 3V + 2E - 6$
- $E \leq 3V - 6$
- Если $E > 3V - 6$, то граф не планарный

Нижняя оценка числа пересечений

- Граф G: n вершин, m ребер.
- Изображение с минимальным числом пересечений:
  - ребра не самопересекающиеся;
  - два ребра с общей вершиной не пересекаются;
  - любые два ребра пересекатся не более 1 раза.
- $\operatorname{cr}(G)$ — минимальное число пересечений
- Добавим вершину в каждую точку пересечения.
- Получился планарный граф, в котором $n + \operatorname{cr}(G)$ вершин, $m + 2\operatorname{cr}(G)$ ребер.
- $m + 2\operatorname{cr}(G) \leq 3(n + \operatorname{cr}(G)) - 6$
- $\operatorname{cr}(G) \geq m - 3n + 6$

Лемма о скрещиваниях

Теорема. G — граф с n вершинами и m ребрами, $m \geq 4n$. Тогда $\mathrm{cr}(G) \geq \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}$.

Доказательство.

- Выберем изображение с минимальным числом пересечений.
- $0 \leq p \leq 1$ — некоторое число.
- G_p — случайный подграф G: каждую вершину независимо с вероятностью p включаем в G_p.
- n_p — число вершин, m_p — число ребер, X_p — число пересечений.
- $\mathrm{E}\, n_p = np$, $\mathrm{E}\, m_p = p^2 m$, $\mathrm{E}\, X_p = p^4\, \mathrm{cr}(G)$
- $0 \leq \mathrm{E}(X_p - m_p + 3n_p) = p^4\, \mathrm{cr}(G) - p^2 m + 3pn$
- $\mathrm{cr}(G) \geq \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3}$
- $p = \frac{4n}{m}$
- $\mathrm{cr}(G) \geq \frac{1}{64}\left(\frac{4m}{(n/m)^2} - \frac{3n}{(n/m)^3}\right) = \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}$.

Неравенство Маркова

Лемма. ξ — это неотрицательная случайная величина. Тогда для всех $k > 0$ выполняется неравенство $\Pr\{\xi \geq k\,\mathrm{E}\,\xi\} \leq \frac{1}{k}$.
Доказательство. Обозначим $m = \mathrm{E}\,\xi$ Пусть
$A_1 \leq A_2 \cdots \leq A_i < mk \leq A_{i+1} \leq \ldots A_n$.
$\Pr\{\xi \geq km\} = p_{i+1} + \cdots + p_n > \frac{1}{k}$. Тогда
$m = p_1A_1 + p_2A_2 + \cdots + p_nA_n \geq p_{i+1}A_{i+1} + \cdots + p_nA_n \geq mk(p_{i+1} + \cdots + p_n) > m$. Противоречие!

- Формула в 3-КНФ: конънкция дизъюнктов, в каждый дизъюнкт входят 3 литерала от разных переменных.
- Случайный набор значений переменным.
- $X_i = 1$, если i-й дизъюнкт выполняется при этом наборе, $X_i = 0$ иначе.
- $EX_i = \frac{7}{8}$
- $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$ — число выполненных дизъюнктов.
- $\mathrm{E}\, X = \frac{7}{8}m$
- Существует набор значений, выполняющий как минимум $\frac{7}{8}m$ дизъюнктов.
- Как найти этот набор?
- $Y = m - X$, $\mathrm{E}\, Y = \frac{1}{8}m$.
- $\Pr[X < \frac{7}{8}m] = \Pr[Y > \frac{1}{8}m] = \Pr[Y \geq \frac{1}{8}m + \frac{1}{8}] = \Pr[Y \geq \frac{1}{8}m(1 + \frac{1}{m})] \leq \frac{1}{1+\frac{1}{m}} = \frac{m}{m+1}$
- $\Pr[X \geq \frac{7}{8}m] \geq \frac{1}{m+1}$

Вероятностный алгоритм

- Повторить $(m+1)^2$ раз:
  1. Выбрать случайный набор значений переменных
  2. Если как минимум $\frac{7}{8}m$ дизъюнктов выполняются, то выдать этот набор.
- Вероятность того, что нужный набор не будет найден $\leq (1 - \frac{1}{m+1})^{(m+1)^2} \leq e^{-(m+1)}$