Алгоритмическая теория игр
Лекция 5

М.Н. Вялый

Лекции в Computer Science club (Санкт-Петербург), 2019

Игры достижимости

Игра достижимости на конечном графе

Игровое поле:

Ориентированный граф $G = (V, E)$, разбиение вершин (позиций) множества $V = V_0 \sqcup V_1$, стартовая вершина v_0, целевые множества $\mathrm{Win}_0 \subseteq V$, $\mathrm{Win}_1 \subseteq V$, $\mathrm{Win}_0 \cap \mathrm{Win}_1 = \varnothing$.

Правила игры

Игроки (называем их 0 и 1) перемещают фишку по рёбрам графа. В начале игры фишка находится в стартовой вершине. В позициях из V_0 ходит 0, в позициях из $V_1 - 1$.

Результат партии

Фишка попала в позицию из V_1: выиграл 1 (результат $+1$)
Фишка попала в позицию из V_0: выиграл 0 (результат -1).
Если партия длится бесконечно, то ничья (результат 0).

Позиционная детерминированность

Теорема

В игре достижимости существует цена и эта цена гарантируется позиционными стратегиями игроков.

Разбор с конца

Построение аттракторов (S_{-1}, S_{+1}) и стратегий s_0, s_1:

1. В начале $S_{-1} := \mathrm{Win}_0$, $S_{+1} := \mathrm{Win}_1$, $S_0 := V \setminus (S_{-1} \cup S_{+1})$.

Разбор с конца

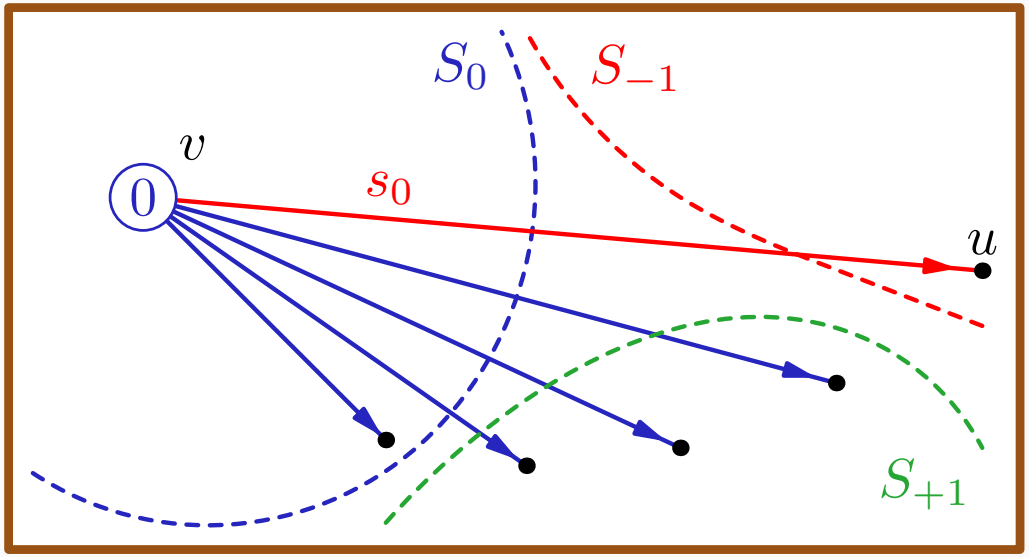
Построение аттракторов (S_{-1}, S_{+1}) и стратегий s_0, s_1:

1. В начале $S_{-1} := \mathrm{Win}_0$, $S_{+1} := \mathrm{Win}_1$, $S_0 := V \setminus (S_{-1} \cup S_{+1})$.
2. Просматриваем позиции из S_0:

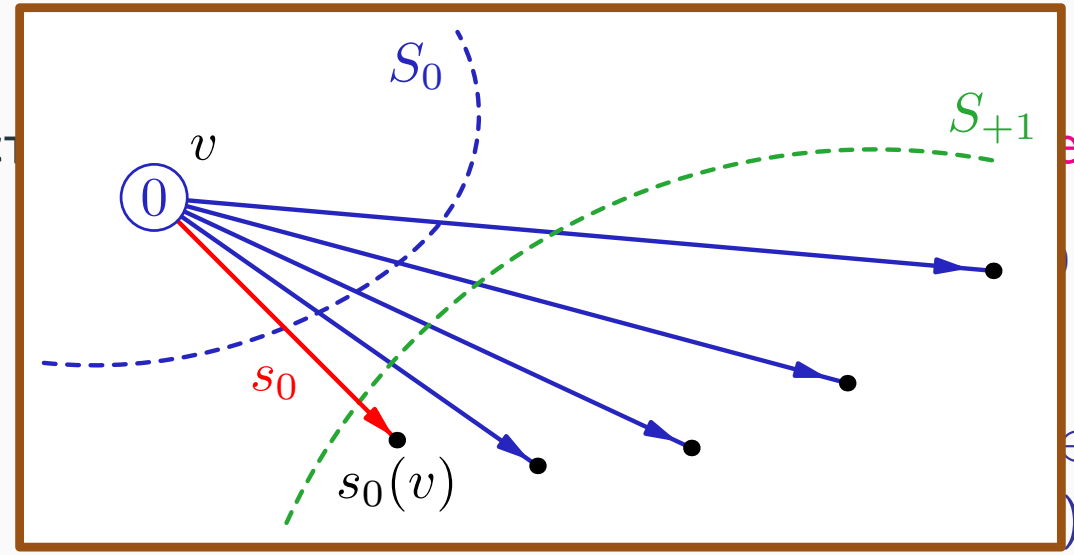
Разбор с конца

Построение аттракторов (S_{-1}, S_{+1}) и стратегий s_0, s_1:

1. В начале $S_{-1} := \mathrm{Win}_0$, $S_{+1} := \mathrm{Win}_1$, $S_0 := V \setminus (S_{-1} \cup S_{+1})$.
2. Просматриваем позиции из S_0:
   2.1 если из $v \in V_0$ есть ход в позицию $u \in S_{-1}$, то $S_{-1} := S_{-1} \cup \{v\}$, $S_0 := S_0 \setminus \{v\}$, $s_0(v) = u$;



Разбор с конца



Пост… …егий s_0, s_1:

1. … $:= V \setminus (S_{-1} \cup S_{+1})$.
2. …

… $\in S_{-1}$, то

… $) = u$;

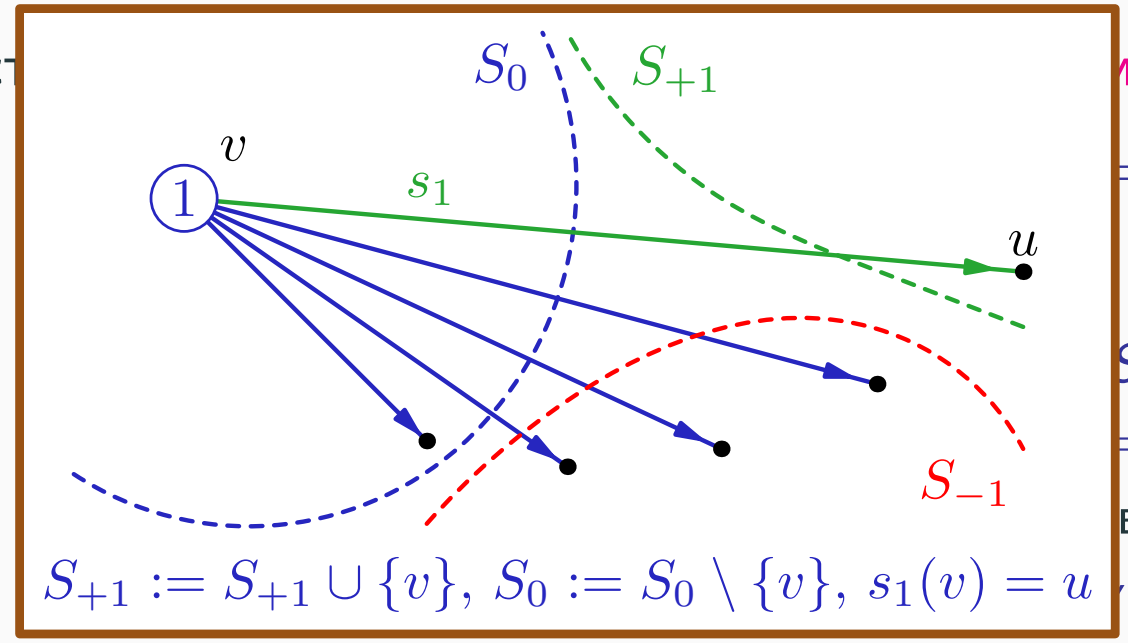
2.2 если все ходы из позиции $v \in V_0$ ведут в множество S_{+1}, то $S_{+1} := S_{+1} \cup \{v\}$, $S_0 := S_0 \setminus \{v\}$, $s_0(v)$ выбирается произвольно;

Разбор с конца

Пост ... ий s_0, s_1:

1. ... $= V \setminus (S_{-1} \cup S_{+1})$.

2. ...



...S_{-1}, то

...$= u$;

...в множество S_{+1},

...) выбирается произвольно;

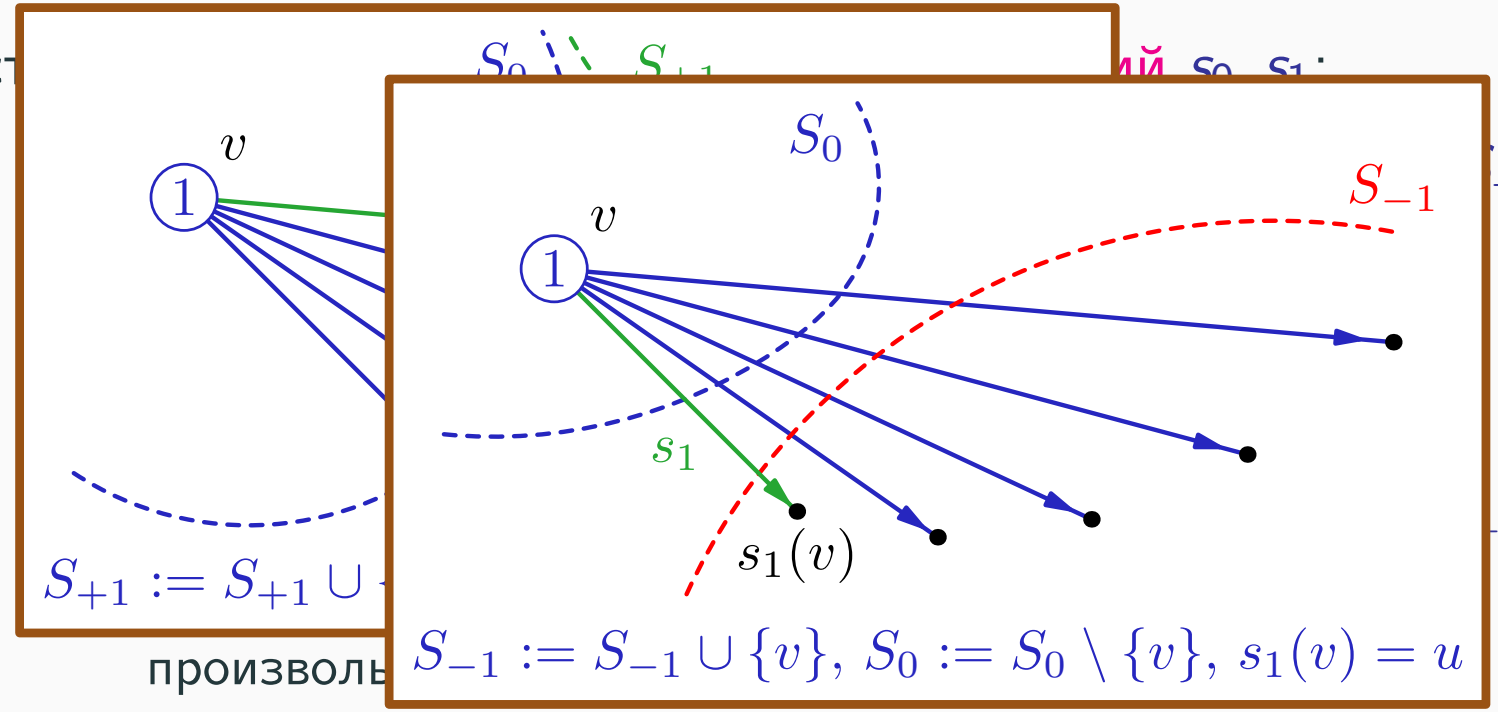
2.3 аналогично для $v \in V_1$.

Разбор с конца

Пост

1.

2.



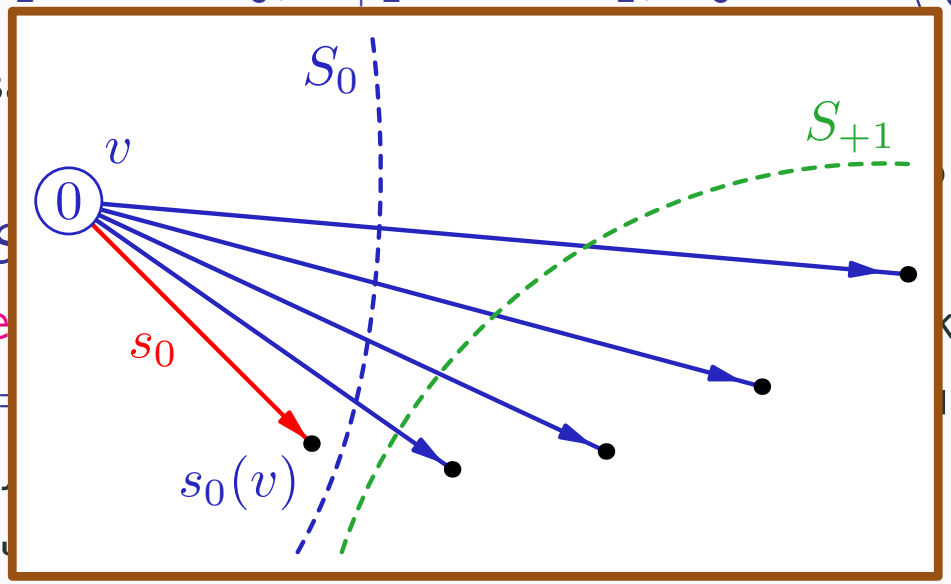
произволь

2.3 аналогично для $v \in V_1$.

Разбор с конца

Построение аттракторов (S_{-1}, S_{+1}) и стратегий s_0, s_1:

1. В начале $S_{-1} := \mathrm{Win}_0$, $S_{+1} := \mathrm{Win}_1$, $S_0 := V \setminus (S_{-1} \cup S_{+1})$.
2. Просматрив
   2.1 если из
   $S_{-1} :=$ S
   2.2 если все
   то S_{+1} :=
   произво
   2.3 аналогич



кество S_{+1},
рается

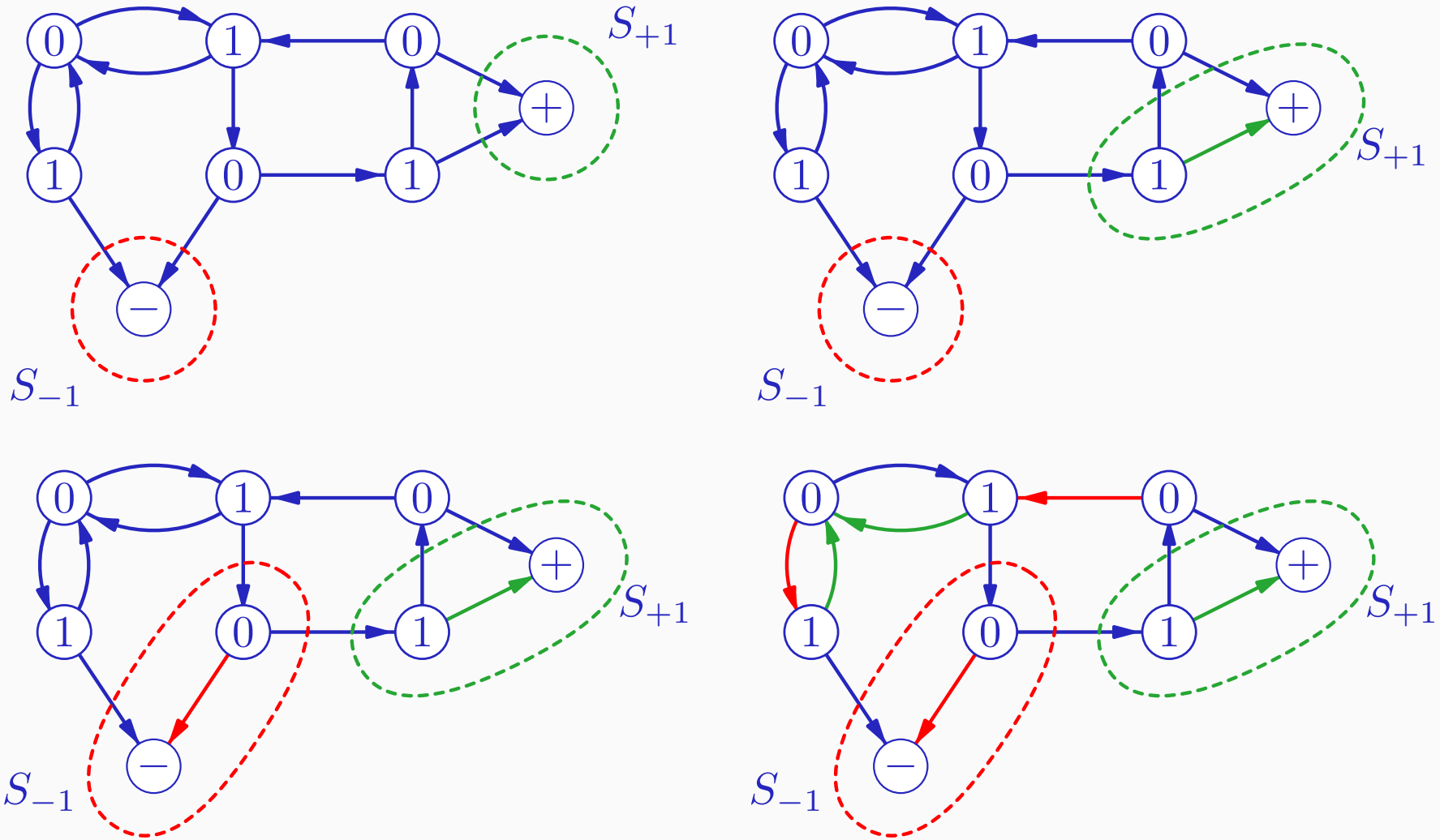
3. Если все вершины S_0 просмотрены и множества S_{-1}, S_{+1} не изменились, то останавливаемся и доопределяем стратегию в позициях из S_0.

Разбор с конца

Построение аттракторов (S_{-1}, S_{+1}) и стратегий s_0, s_1:

1. В начале $S_{-1} := \mathrm{Win}_0$, $S_{+1} := \mathrm{Win}_1$, $S_0 := V \setminus (S_{-1} \cup S_{+1})$.
2. Просматриваем позиции из S_0:
   2.1 если из $v \in V_0$ есть ход в позицию $u \in S_{-1}$, то $S_{-1} := S_{-1} \cup \{v\}$, $S_0 := S_0 \setminus \{v\}$, $s_0(v) = u$;
   2.2 если все ходы из позиции $v \in V_0$ ведут в множество S_{+1}, то $S_{+1} := S_{+1} \cup \{v\}$, $S_0 := S_0 \setminus \{v\}$, $s_0(v)$ выбирается произвольно;
   2.3 аналогично для $v \in V_1$.
3. Если все вершины S_0 просмотрены и множества S_{-1}, S_{+1} не изменились, то останавливаемся и доопределяем стратегию в позициях из S_0.

Пример построения аттракторов и стратегий



Оценка времени работы процедуры

Количество вершин в графе игры — n.

Количество шагов $O(n^2)$: множества S_{-1}, S_{+1} увеличиваются не более n раз, и каждый шаг увеличения требует просмотра не более n вершин.

Общее время работы полиномиально.

Доказательство корректности (начало)

Теорема

Цена игры в позиции $v \in S_i$ равна i, и эту цену гарантируют стратегии s_0, s_1.

Доказательство

1. Для S_{-1}, S_{+1}: индукция по числу шагов. База очевидна.
2. Пусть утверждение выполнено перед шагом, на котором в S_{-1} добавляется v.
3. Если $v \in V_0$, то $s_0(v) \in S_{-1}$ и применимо индуктивное предположение. Если $v \in V_1$, то любой ход из v ведёт в позицию из S_{-1}, для которой применимо индуктивное предположение.
4. Аналогично рассуждаем при увеличении S_{+1}.

Доказательство корректности (начало)

Теорема

Цена игры в позиции $v \in S_i$ равна i, и эту цену гарантируют стратегии s_0, s_1.

Доказательство

1. Для S_{-1}, S_{+1}: индукция по числу шагов. База очевидна.
2. Пусть утверждение выполнено перед шагом, на котором в S_{-1} добавляется v.
3. Если $v \in V_0$, то $s_0(v) \in S_{-1}$ и применимо индуктивное предположение. Если $v \in V_1$, то любой ход из v ведёт в позицию из S_{-1}, для которой применимо индуктивное предположение.
4. Аналогично рассуждаем при увеличении S_{+1}.

Доказательство корректности (начало)

Теорема

Цена игры в позиции $v \in S_i$ равна i, и эту цену гарантируют стратегии s_0, s_1.

Доказательство

1. Для S_{-1}, S_{+1}: индукция по числу шагов. База очевидна.
2. Пусть утверждение выполнено перед шагом, на котором в S_{-1} добавляется v.
3. Если $v \in V_0$, то $s_0(v) \in S_{-1}$ и применимо индуктивное предположение. Если $v \in V_1$, то любой ход из v ведёт в позицию из S_{-1}, для которой применимо индуктивное предположение.
4. Аналогично рассуждаем при увеличении S_{+1}.

Доказательство корректности (начало)

Теорема

Цена игры в позиции $v \in S_i$ равна i, и эту цену гарантируют стратегии s_0, s_1.

Доказательство

1. Для S_{-1}, S_{+1}: индукция по числу шагов. База очевидна.
2. Пусть утверждение выполнено перед шагом, на котором в S_{-1} добавляется v.
3. Если $v \in V_0$, то $s_0(v) \in S_{-1}$ и применимо индуктивное предположение. Если $v \in V_1$, то любой ход из v ведёт в позицию из S_{-1}, для которой применимо индуктивное предположение.
4. Аналогично рассуждаем при увеличении S_{+1}.

Доказательство корректности (завершение)

Теорема

Цена игры в позиции $v \in S_i$ равна i, и эту цену гарантируют стратегии s_0, s_1.

Доказательство

5. Для S_0: докажем, что если игра начинается в позиции $v \in S_0$, стратегия s_i гарантирует, что партия не закончится в позиции из множества Win_{1-i}.
6. Если $v \in S_0$, то s_i ведёт в позицию из S_0.
7. Если игрок $1 - i$ делает ход $(u'u'')$ в позиции $u' \in S_0$, то этот ход не ведёт в множество $S_{1-2i} \supseteq \mathrm{Win}_{1-i}$ (иначе множество S_{1-2i} можно расширить).

Доказательство корректности (завершение)

Теорема

Цена игры в позиции $v \in S_i$ равна i, и эту цену гарантируют стратегии s_0, s_1.

Доказательство

5. Для S_0: докажем, что если игра начинается в позиции $v \in S_0$, стратегия s_i гарантирует, что партия не закончится в позиции из множества Win_{1-i}.
6. Если $v \in S_0$, то s_i ведёт в позицию из S_0.
7. Если игрок $1 - i$ делает ход $(u'u'')$ в позиции $u' \in S_0$, то этот ход не ведёт в множество $S_{1-2i} \supseteq \mathrm{Win}_{1-i}$ (иначе множество S_{1-2i} можно расширить).

Доказательство корректности (завершение)

Теорема

Цена игры в позиции $v \in S_i$ равна i, и эту цену гарантируют стратегии s_0, s_1.

Доказательство

5. Для S_0: докажем, что если игра начинается в позиции $v \in S_0$, стратегия s_i гарантирует, что партия не закончится в позиции из множества Win_{1-i}.
6. Если $v \in S_0$, то s_i ведёт в позицию из S_0.
7. Если игрок $1 - i$ делает ход $(u'u'')$ в позиции $u' \in S_0$, то этот ход не ведёт в множество $S_{1-2i} \supseteq \mathrm{Win}_{1-i}$ (иначе множество S_{1-2i} можно расширить).

Игра достижимости на выигрыш

Есть только одно целевое множество, скажем, Win_1. Цель игрока 1 состоит в том, чтобы партия попала в позицию из этого множества, цель игрока 0 — воспрепятствовать этому. Ясно, что анализ игры в этом случае точно такой же, только множество S_{-1} пустое. В позициях их S_{+1} выигрывает игрок 1, в остальных позициях выигрывает игрок 0.

Игры чётности

Определения

Игровое поле:

Ориентированный граф $G = (V, E)$, разбиение вершин $V = V_0 \sqcup V_1$, стартовая вершина v_0 и приоритеты: $p\colon E \to \{0, \ldots, d-1\}$. Тупиковых вершин в графе нет.

Правила игры

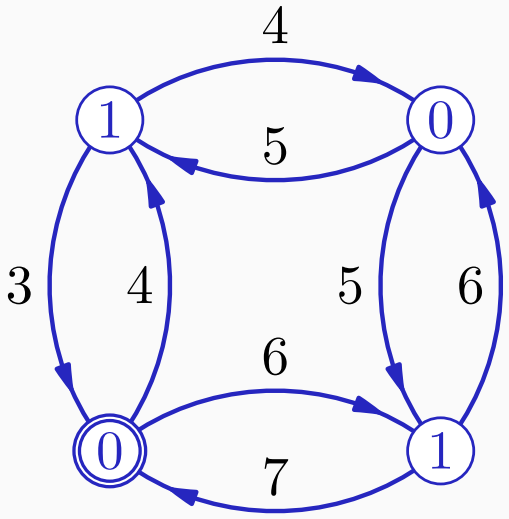
Игроки (Чёт, он же 0, и Нечет, он же 1) двигают по вершинам графа фишку, как и в играх достижимости.

Партия игры и результат

Партия: бесконечный путь по графу $v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_t,\ \ldots$; $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Результат: если $\limsup_t p(v_t, v_{t+1})$ чётный, то выиграл Чёт. Иначе выиграл Нечет.

Пример игры чётности

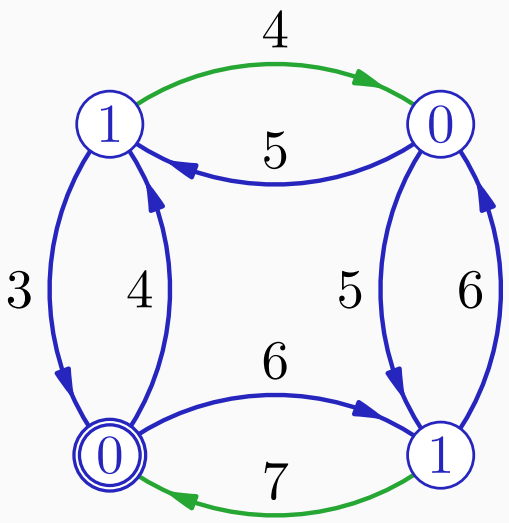


Возможная последовательность приоритетов в партии:

6, 7, 4, 4, (5, 6),

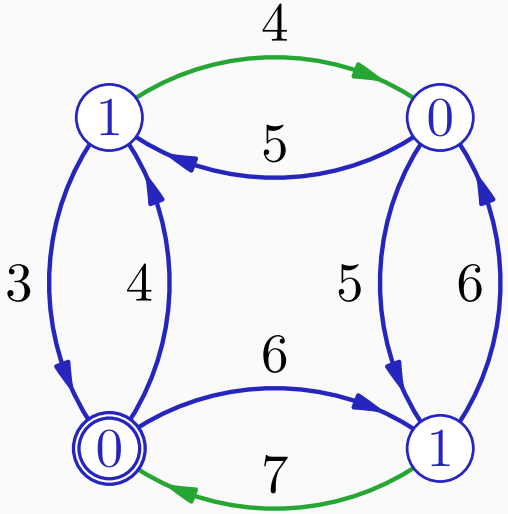
В такой партии выигрывает Чёт.

Выигрывающая позиционная стратегия Нечета

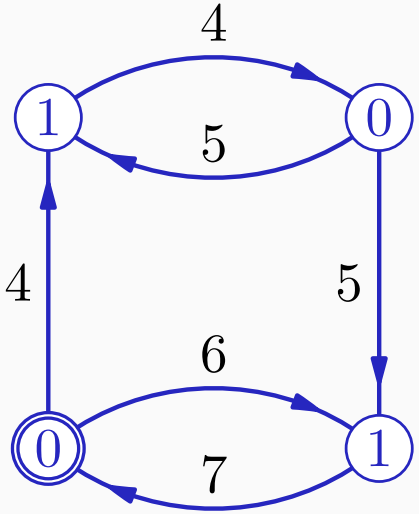


Когда партия оказывается в позиции Нечета, он делает ход по зелёному ребру. Такая стратегия не зависит от начала партии (memoryless) и потому игрок может смело объявить её перед игрой.

Стратегический граф



Удаляем рёбра игрока, не входящие в стратегию.



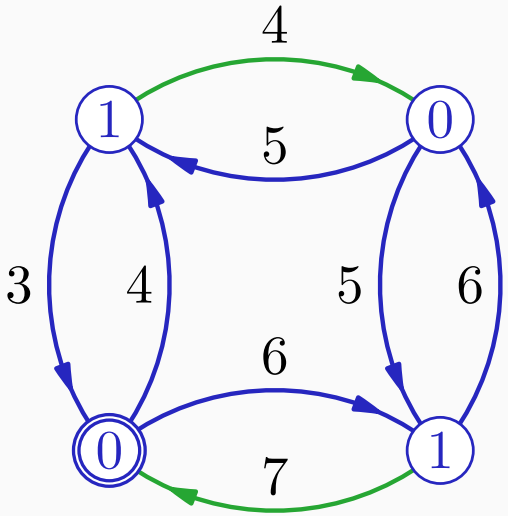
Определение

Цикл $(u_0, u_1, \ldots, u_{\ell-1})$ нечётный, если максимальное значение приоритета на рёбрах этого цикла нечётно. Аналогично определяем чётные циклы.

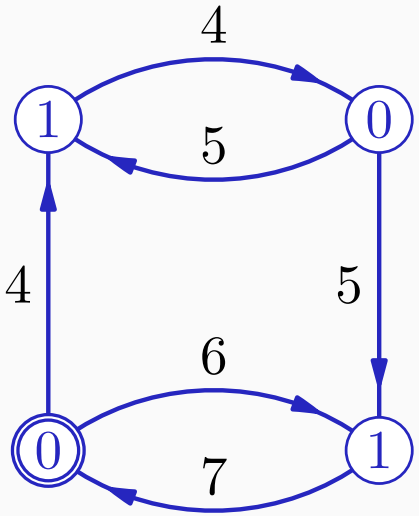
Утверждение

В стратегическом графе на рисунке все достижимые циклы нечётные.

Стратегический граф



Удаляем рёбра игрока, не входящие в стратегию.



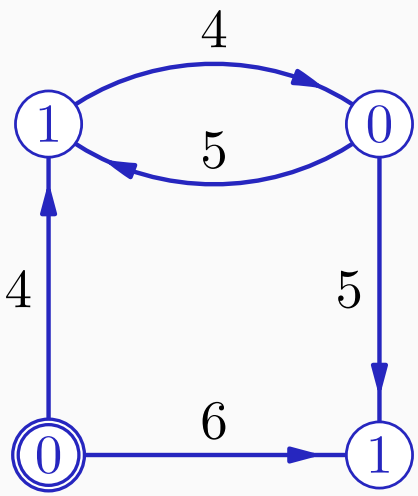
Определение

Цикл $(u_0, u_1, \ldots, u_{\ell-1})$ нечётный, если максимальное значение приоритета на рёбрах этого цикла нечётно. Аналогично определяем чётные циклы.

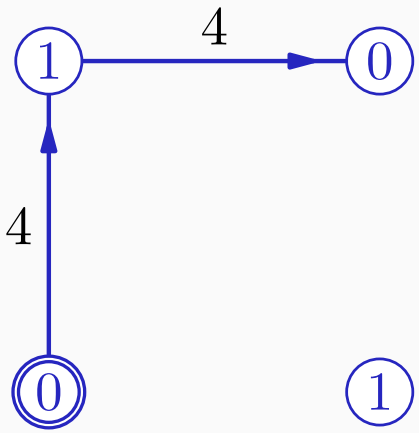
Утверждение

В стратегическом графе на рисунке все достижимые циклы нечётные.

Проверка утверждения



Граф $G_s(\leqslant 6)$



Граф $G_s(\leqslant 4)$

Если есть цикл с максимальным приоритетом 6, он входит в компоненту сильной связности $G_s(\leqslant 6)$.

Если есть цикл с максимальным приоритетом 4, он входит в компоненту сильной связности $G_s(\leqslant 4)$.

Эта идея работает и в общем случае

Задача

Постройте алгоритм, который за полиномиальное от количества вершин графа время проверяет, что в графе нет достижимых из начальной позиции чётных циклов.

Чётность циклов и выигрыш в игре чётности

Лемма

Если граф игры чётности не содержит чётных циклов, то в любой партии выигрывает Нечет. Аналогично, если граф игры чётности не содержит нечётных циклов, то в любой партии выигрывает Чёт.

Доказательство

Приоритеты $p_1,\ p_2,\ \ldots, p_t,\ \ldots;\ p^* = \limsup_t p(v_t, v_{t+1})$.

Выберем такое T, что $p_t \leqslant p^*$ при $t \geqslant T$. Приоритет p^* встретится после момента T бесконечно много раз. Возьмём первые $n+1$ вхождений p^* после момента T (n — количество вершин в графе). Два из них отвечают одной и той же вершине. Получили (нечётный) цикл, значит, p^* нечётен.

Чётность циклов и выигрыш в игре чётности

Лемма

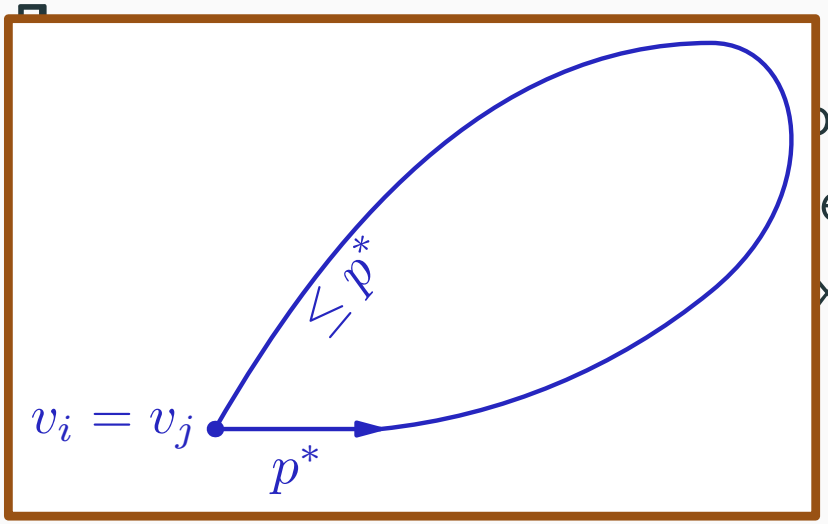
Если граф игры чётности не содержит чётных циклов, то в любой партии выигрывает Нечет. Аналогично, если граф игры чётности не содержит нечётных циклов, то в любой партии выигрывает Чёт.

Доказательство

Приоритеты $p_1,\ p_2,\ \ldots, p_t,\ \ldots$; $p^* = \limsup_t p(v_t, v_{t+1})$.

Выберем такое T, что $p_t \leqslant p^*$ при $t \geqslant T$. Приоритет p^* встретится после момента T бесконечно много раз. Возьмём первые $n+1$ вхождений p^* после момента T (n — количество вершин в графе). Два из них отвечают одной и той же вершине. Получили (нечётный) цикл, значит, p^* нечётен.

Чётность циклов и выигрыш в игре чётности



одержит чётных циклов, то в
ет. Аналогично, если граф игры
х циклов, то в любой партии

Приоритеты $p_1,\ p_2,\ \ldots, p_t,\ \ldots$; $p^* = \limsup_t p(v_t, v_{t+1})$.

Выберем такое T, что $p_t \leqslant p^*$ при $t \geqslant T$. Приоритет p^* встретится после момента T бесконечно много раз. Возьмём первые $n+1$ вхождений p^* после момента T (n — количество вершин в графе). Два из них отвечают одной и той же вершине. Получили (нечётный) цикл, значит, p^* нечётен.

Детерминированность игр чётности

1. Можно применить теорему Мартина о детерминированности борелевских игр. (Нам не понадобится.)
2. Но справедлив более сильный факт: в любой игре чётности у одного из игроков есть выигрывающая позиционная стратегия (позиционная детерминированность).
3. Есть несколько доказательств позиционной детерминированности игр чётности, в том числе весьма прямолинейные комбинаторные.
4. Мы сведём игры чётности к так называемым циклическим играм (mean payoff games, MPG), для которых и докажем позиционную детерминированность.

Детерминированность игр чётности

1. Можно применить теорему Мартина о детерминированности борелевских игр. (Нам не понадобится.)
2. Но справедлив более сильный факт: в любой игре чётности у одного из игроков есть выигрывающая позиционная стратегия (позиционная детерминированность).
3. Есть несколько доказательств позиционной детерминированности игр чётности, в том числе весьма прямолинейные комбинаторные.
4. Мы сведём игры чётности к так называемым циклическим играм (mean payoff games, MPG), для которых и докажем позиционную детерминированность.

Детерминированность игр чётности

1. Можно применить теорему Мартина о детерминированности борелевских игр. (Нам не понадобится.)
2. Но справедлив более сильный факт: в любой игре чётности у одного из игроков есть выигрывающая позиционная стратегия (позиционная детерминированность).
3. Есть несколько доказательств позиционной детерминированности игр чётности, в том числе весьма прямолинейные комбинаторные.
4. Мы сведём игры чётности к так называемым циклическим играм (mean payoff games, MPG), для которых и докажем позиционную детерминированность.

Детерминированность игр чётности

1. Можно применить теорему Мартина о детерминированности борелевских игр. (Нам не понадобится.)
2. Но справедлив более сильный факт: в любой игре чётности у одного из игроков есть выигрывающая позиционная стратегия (позиционная детерминированность).
3. Есть несколько доказательств позиционной детерминированности игр чётности, в том числе весьма прямолинейные комбинаторные.
4. Мы сведём игры чётности к так называемым циклическим играм (mean payoff games, MPG), для которых и докажем позиционную детерминированность.

Циклические игры

Определения

Игровое поле:

Ориентированный граф $G = (V, E)$, разбиение $V = V_0 \sqcup V_1$, начальная позиция v_0. Рёбрам графа приписаны веса, обозначаем их $w(u, v)$. Тупиковых вершин в графе нет.

Правила игры

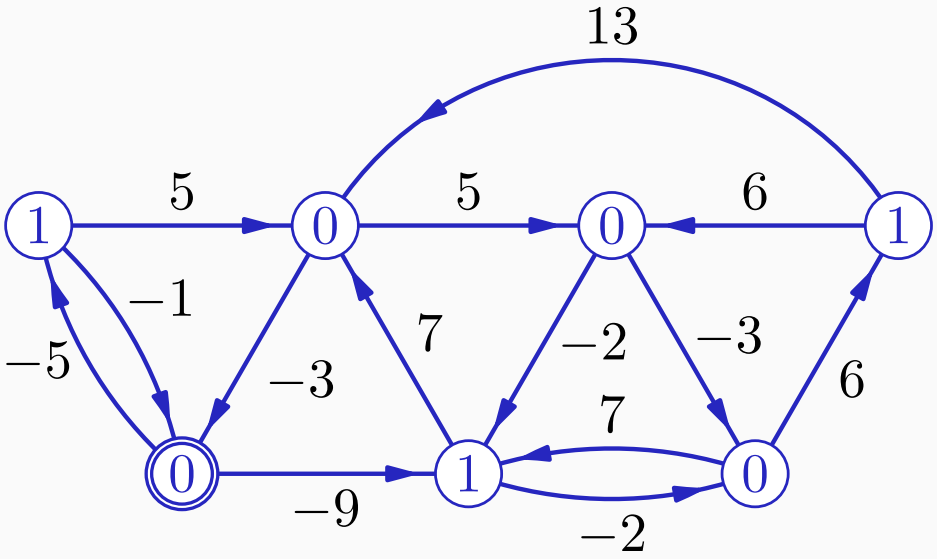
Игроки (Мин, он же 0, и Макс, он же 1) двигают по вершинам графа фишку, как и раньше.

Партия игры и результат

Партия: $v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_t,\ \ldots;\ (v_i, v_{i+1}) \in E$.

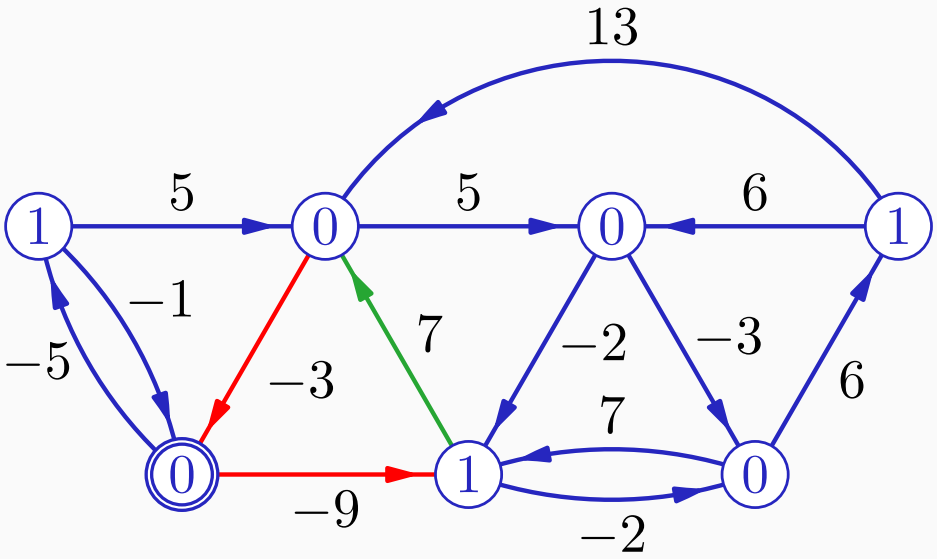
Результат (выигрыш Макса): $\limsup\limits_{n} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} w(v_i, v_{i+1})$.

Пример циклической игры



Жадная стратегия: пример

Каждый раз игрок выбирает ход экстремального веса (Макс — максимально возможный; Мин — минимально возможный).



Последовательность весов периодическая: $(-9, 7, -3)$. Поэтому результат $(-9 + 7 - 3)/3 = -5/3$.

Хорош ли этот результат для Мина? для Макса?

Жадная стратегия плоха

Утверждение 1

У Макса есть стратегия, гарантирующая результат не меньше -1 (лучше жадной).

Утверждение 2

После первого хода Мина у Макса есть стратегия, гарантирующая результат не меньше $+2$ (то есть жадный ход Мина неудачный).

Основная теорема о циклических играх

Теорема

У каждой циклической игры есть цена p (у Макса есть стратегия, гарантирующая результат не меньше p, у Мина есть стратегия, гарантирующая результат не выше p).

Эта цена гарантируется равномерными позиционными оптимальными стратегиями игроков (ход зависит только от текущей позиции и не зависит ни от предыстории партии, ни от начальной позиции).

План доказательства основной теоремы

1. Указать семейство циклических игр, для которых утверждение теоремы тривиально (канонические формы).
2. Построить удачное отношение эквивалентности для циклических игр.
3. Доказать, что в каждом классе эквивалентности есть игра в канонической форме.
4. Для этого использовать теорему Колберга о нерастягивающих отображениях.

План доказательства основной теоремы

1. Указать семейство циклических игр, для которых утверждение теоремы тривиально (канонические формы).
2. Построить удачное отношение эквивалентности для циклических игр.
3. Доказать, что в каждом классе эквивалентности есть игра в канонической форме.
4. Для этого использовать теорему Колберга о нерастягивающих отображениях.

План доказательства основной теоремы

1. Указать семейство циклических игр, для которых утверждение теоремы тривиально (канонические формы).
2. Построить удачное отношение эквивалентности для циклических игр.
3. Доказать, что в каждом классе эквивалентности есть игра в канонической форме.
4. Для этого использовать теорему Колберга о нерастягивающих отображениях.

План доказательства основной теоремы

1. Указать семейство циклических игр, для которых утверждение теоремы тривиально (канонические формы).
2. Построить удачное отношение эквивалентности для циклических игр.
3. Доказать, что в каждом классе эквивалентности есть игра в канонической форме.
4. Для этого использовать теорему Колберга о нерастягивающих отображениях.

Каноническая форма циклической игры

Циклическая игра в канонической форме задаётся функциями $p\colon V \to \mathbb{R}$ и $s\colon V \to V$. Свойства:

1. Корректность s: $(i, s(i)) \in E(G)$ для всех $i \in V$.
2. Стратегия s сохраняет цену: $p(s(i)) = p(i)$ для всех $i \in V$.
3. Вес стратегического ребра совпадает с ценой концов ребра: $w(i, s(i)) = p(i)$ для всех $i \in V$.
4. Стратегическое ребро локально лучшее: $p(i) = \min\limits_{(i,j)\in E} w(i,j)$ для всех $i \in V_0$; $p(i) = \max\limits_{(i,j)\in E} w(i,j)$ для всех $i \in V_1$.
5. У Макса нет ходов, увеличивающих цену; у Мина нет ходов, уменьшающих цену: если $(ij) \in E$, то $p(j) \geqslant p(i)$ для всех $i \in V_0$ и $p(j) \leqslant p(i)$ для всех $i \in V_1$.

Каноническая форма циклической игры

Циклическая игра в канонической форме задаётся функциями $p\colon V \to \mathbb{R}$ и $s\colon V \to V$. Свойства:

1. Корректность s: $(i, s(i)) \in E(G)$ для всех $i \in V$.
2. Стратегия s сохраняет цену: $p(s(i)) = p(i)$ для всех $i \in V$.
3. Вес стратегического ребра совпадает с ценой концов ребра: $w(i, s(i)) = p(i)$ для всех $i \in V$.
4. Стратегическое ребро локально лучшее: $p(i) = \min\limits_{(i,j)\in E} w(i,j)$ для всех $i \in V_0$; $p(i) = \max\limits_{(i,j)\in E} w(i,j)$ для всех $i \in V_1$.
5. У Макса нет ходов, увеличивающих цену; у Мина нет ходов, уменьшающих цену: если $(ij) \in E$, то $p(j) \geqslant p(i)$ для всех $i \in V_0$ и $p(j) \leqslant p(i)$ для всех $i \in V_1$.

Каноническая форма циклической игры

Циклическая игра в канонической форме задаётся функциями $p\colon V \to \mathbb{R}$ и $s\colon V \to V$. Свойства:

1. Корректность s: $(i, s(i)) \in E(G)$ для всех $i \in V$.
2. Стратегия s сохраняет цену: $p(s(i)) = p(i)$ для всех $i \in V$.
3. Вес стратегического ребра совпадает с ценой концов ребра: $w(i, s(i)) = p(i)$ для всех $i \in V$.
4. Стратегическое ребро локально лучшее: $p(i) = \min\limits_{(i,j)\in E} w(i,j)$ для всех $i \in V_0$; $p(i) = \max\limits_{(i,j)\in E} w(i,j)$ для всех $i \in V_1$.
5. У Макса нет ходов, увеличивающих цену; у Мина нет ходов, уменьшающих цену: если $(ij) \in E$, то $p(j) \geqslant p(i)$ для всех $i \in V_0$ и $p(j) \leqslant p(i)$ для всех $i \in V_1$.

Каноническая форма циклической игры

Циклическая игра в канонической форме задаётся функциями $p\colon V \to \mathbb{R}$ и $s\colon V \to V$. Свойства:

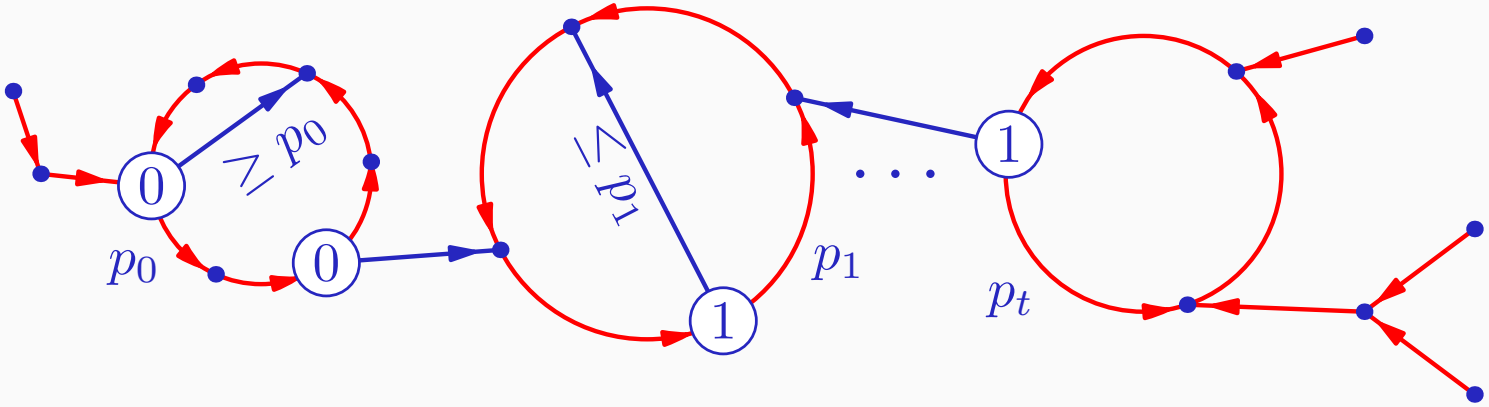
1. Корректность s: $(i, s(i)) \in E(G)$ для всех $i \in V$.
2. Стратегия s сохраняет цену: $p(s(i)) = p(i)$ для всех $i \in V$.
3. Вес стратегического ребра совпадает с ценой концов ребра: $w(i, s(i)) = p(i)$ для всех $i \in V$.
4. Стратегическое ребро локально лучшее: $p(i) = \min\limits_{(i,j)\in E} w(i,j)$ для всех $i \in V_0$; $p(i) = \max\limits_{(i,j)\in E} w(i,j)$ для всех $i \in V_1$.
5. У Макса нет ходов, увеличивающих цену; у Мина нет ходов, уменьшающих цену: если $(ij) \in E$, то $p(j) \geqslant p(i)$ для всех $i \in V_0$ и $p(j) \leqslant p(i)$ для всех $i \in V_1$.

Каноническая форма циклической игры

Циклическая игра в канонической форме задаётся функциями $p\colon V \to \mathbb{R}$ и $s\colon V \to V$. Свойства:

1. Корректность s: $(i, s(i)) \in E(G)$ для всех $i \in V$.
2. Стратегия s сохраняет цену: $p(s(i)) = p(i)$ для всех $i \in V$.
3. Вес стратегического ребра совпадает с ценой концов ребра: $w(i, s(i)) = p(i)$ для всех $i \in V$.
4. Стратегическое ребро локально лучшее: $p(i) = \min\limits_{(i,j)\in E} w(i,j)$ для всех $i \in V_0$; $p(i) = \max\limits_{(i,j)\in E} w(i,j)$ для всех $i \in V_1$.
5. У Макса нет ходов, увеличивающих цену; у Мина нет ходов, уменьшающих цену: если $(ij) \in E$, то $p(j) \geqslant p(i)$ для всех $i \in V_0$ и $p(j) \leqslant p(i)$ для всех $i \in V_1$.

Основная теорема для канонических игр



$$p_0 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_t$$

В канонической игре любой игрок, отклоняющийся от стратегии s, не улучшает свой результат.

Поэтому для игры в канонической форме основная теорема о циклических играх выполнена.

Оптимальные стратегии задаются функцией s, а функция $p(v)$ задаёт цену игры, начинающейся в вершине v.

Потенциалы и потенциальные функции

Потенциал: функция $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$.

Потенциальная функция на рёбрах графа

$$d\varphi\colon (ij) \mapsto \varphi(j) - \varphi(i).$$

Лемма

Прибавление потенциальной функции к весам графа не меняет результата игры в любой партии.

Доказательство

Сумма значений потенциальной функции вдоль любого маршрута равна разности потенциалов в конечной и начальной вершинах маршрута. Поэтому средняя длина бесконечного маршрута относительно потенциальной функции равна 0.

Потенциалы и потенциальные функции

Потенциал: функция $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$.

Потенциальная функция на рёбрах графа

$$d\varphi\colon (ij) \mapsto \varphi(j) - \varphi(i).$$

Лемма

Прибавление потенциальной функции к весам графа не меняет результата игры в любой партии.

Доказательство

Сумма значений потенциальной функции вдоль любого маршрута равна разности потенциалов в конечной и начальной вершинах маршрута. Поэтому средняя длина бесконечного маршрута относительно потенциальной функции равна 0.

Потенциалы и потенциальные функции

Потенциал: функция $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$.

Потенциальная функция на рёбрах графа

$$d\varphi\colon (ij) \mapsto \varphi(j) - \varphi(i).$$

Лемма

Прибавление потенциальной функции к весам графа не меняет результата игры в любой партии.

Доказательство

Сумма значений потенциальной функции вдоль любого маршрута равна разности потенциалов в конечной и начальной вершинах маршрута. Поэтому средняя длина бесконечного маршрута относительно потенциальной функции равна 0.

Эквивалентность циклических игр

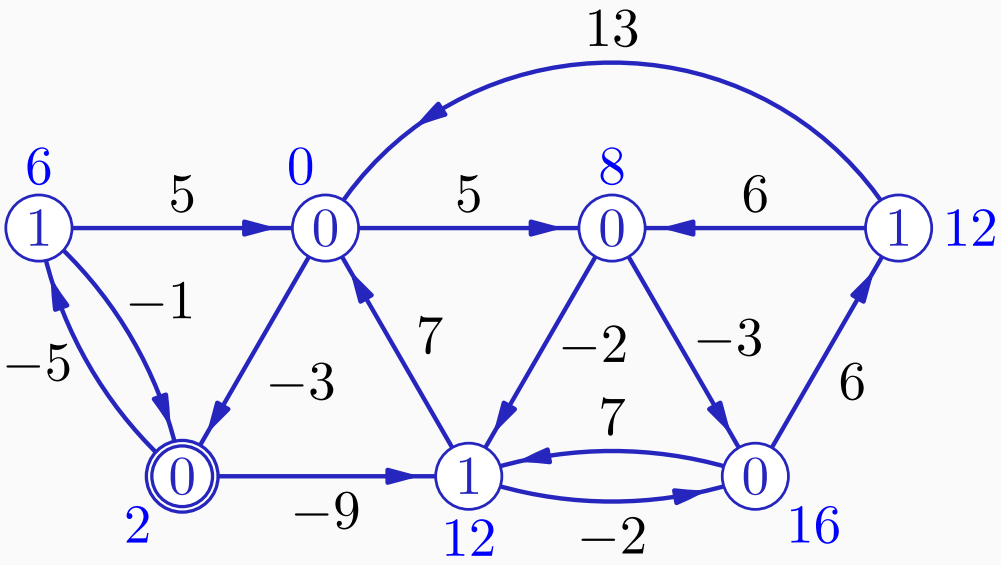
Определение

Две циклические игры эквивалентны, если у них одинаковы граф, разбиение вершин, начальная вершина, а веса рёбер различаются на потенциальную функцию.

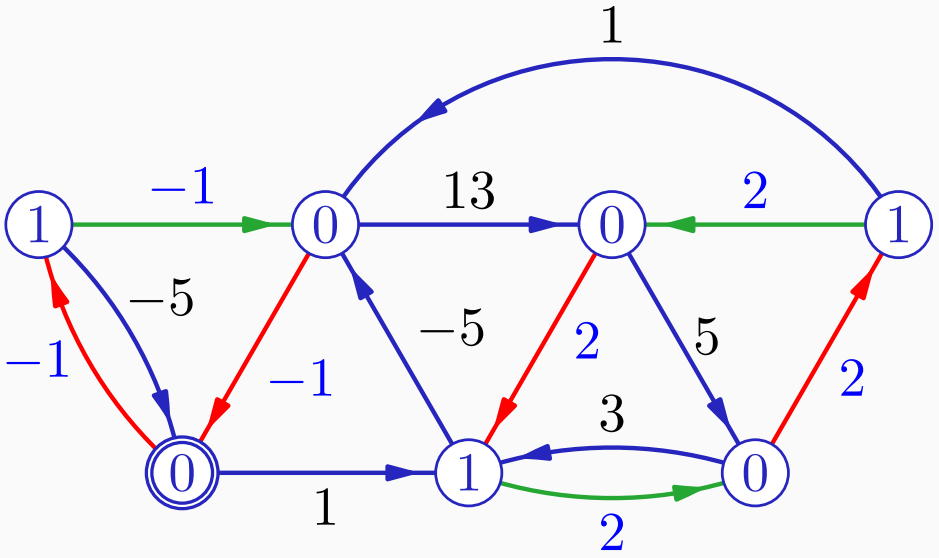
Результат любой партии в эквивалентных играх одинаков. Поэтому достаточно рассматривать циклические игры с точностью до классов эквивалентности.

Пример приведения к канонической форме

Потенциалы

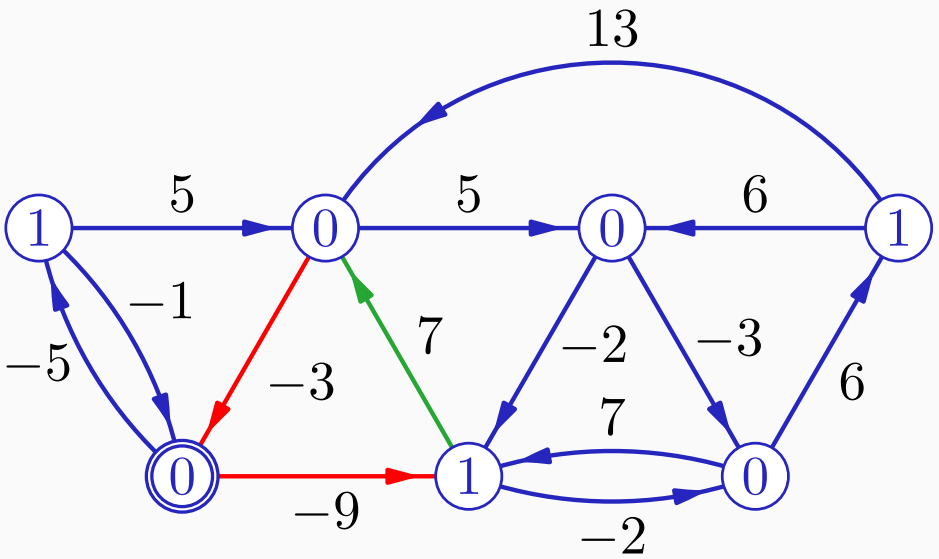


Каноническая форма

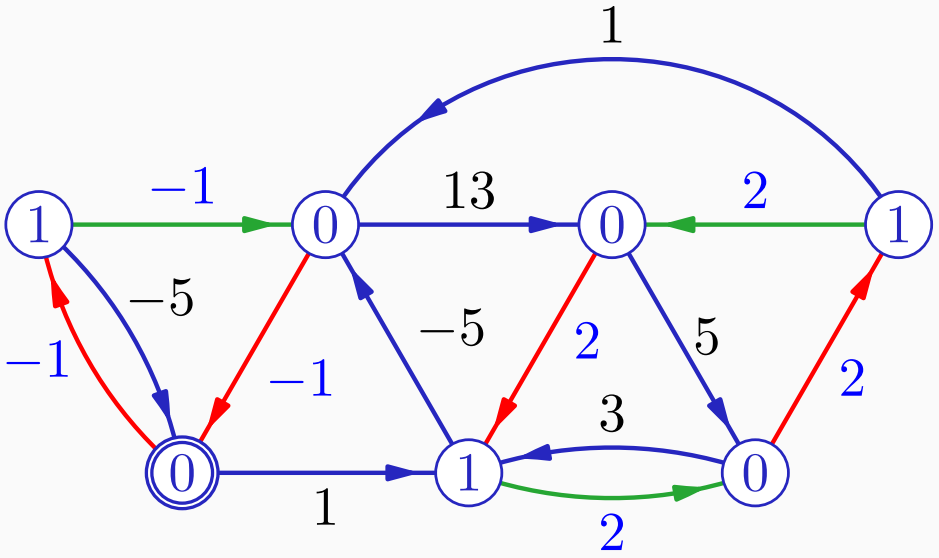


Возвращение к жадным стратегиям

Жадные стратегии



Каноническая форма



Теорема о канонических формах

Теорема (Гурвич, Карзанов, Хачиян; 1988)
Для каждой циклической игры есть эквивалентная игра в канонической форме.

Из теоремы о канонических формах сразу следует основная теорема о циклических играх.

Исходное доказательство теоремы о канонических формах было алгоритмическим: каноническая форма строилась явно (псевдополиномиальным) алгоритмом.

Мы докажем эту теорему, используя свойства нерастягивающих кусочно-линейных отображений.

Теорема о канонических формах

Теорема (Гурвич, Карзанов, Хачиян; 1988)
Для каждой циклической игры есть эквивалентная игра в канонической форме.

Из теоремы о канонических формах сразу следует основная теорема о циклических играх.

Исходное доказательство теоремы о канонических формах было алгоритмическим: каноническая форма строилась явно (псевдополиномиальным) алгоритмом.

Мы докажем эту теорему, используя свойства нерастягивающих кусочно-линейных отображений.

Теорема о канонических формах

Теорема (Гурвич, Карзанов, Хачиян; 1988)
Для каждой циклической игры есть эквивалентная игра в канонической форме.

Из теоремы о канонических формах сразу следует основная теорема о циклических играх.

Исходное доказательство теоремы о канонических формах было алгоритмическим: каноническая форма строилась явно (псевдополиномиальным) алгоритмом.

Мы докажем эту теорему, используя свойства нерастягивающих кусочно-линейных отображений.

Связь между играми чётности и циклическими играми

Сводимость и её свойства

$\mathfrak{G}$ — игра чётности $G = (V, E)$, $V = V_0 \sqcup V_1$, v_0, $p\colon E \to \{0, \dots, d-1\}$, $|V| = n$.

$\mathfrak{G}'$ — циклическая игра: граф, разбиение позиций и начальная позиция те же; веса рёбер

$$w(u, v) = (-1)^{p(u,v)} M^{p(u,v)}, \quad \text{где } M = n + 1.$$

Предполагаем, что основная теорема о циклических играх справедлива.

Лемма о сводимости PG к MPG

У Чёта существует выигрывающая позиционная стратегия в игре $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда цена игры $\mathfrak{G}'$ положительная. В противном случае выигрывающая позиционная стратегия существует у Нечета.

Сводимость и её свойства

$\mathfrak{G}$ — игра чётности $G = (V, E)$, $V = V_0 \sqcup V_1$, v_0, $p\colon E \to \{0, \ldots, d-1\}$, $|V| = n$.

$\mathfrak{G}'$ — циклическая игра: граф, разбиение позиций и начальная позиция те же; веса рёбер

$$w(u, v) = (-1)^{p(u,v)} M^{p(u,v)}, \quad \text{где } M = n + 1.$$

Предполагаем, что основная теорема о циклических играх справедлива.

Лемма о сводимости PG к MPG

У Чёта существует выигрывающая позиционная стратегия в игре $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда цена игры $\mathfrak{G}'$ положительная. В противном случае выигрывающая позиционная стратегия существует у Нечета.

Циклические игры с положительными циклами

Утверждение

Если граф циклической игры не содержит циклов неположительного веса, то результат любой партии положительный. Аналогично, если граф циклической игры не содержит циклов положительного веса, то результат любой партии неположительный.

Доказательство

Последовательность весов в партии

$$w_1,\ w_2,\ \ldots, w_t,\ \ldots$$

Хотя бы одна вершина v^* встречается в этой партии бесконечно часто. Суммы весов между последовательными посещениями v^* — это длины циклов, они положительны.

Циклические игры с положительными циклами

Утверждение

Если граф циклической игры не содержит циклов неположительного веса, то результат любой партии положительный. Аналогично, если граф циклической игры не содержит циклов положительного веса, то результат любой партии неположительный.

Доказательство

Последовательность весов в партии

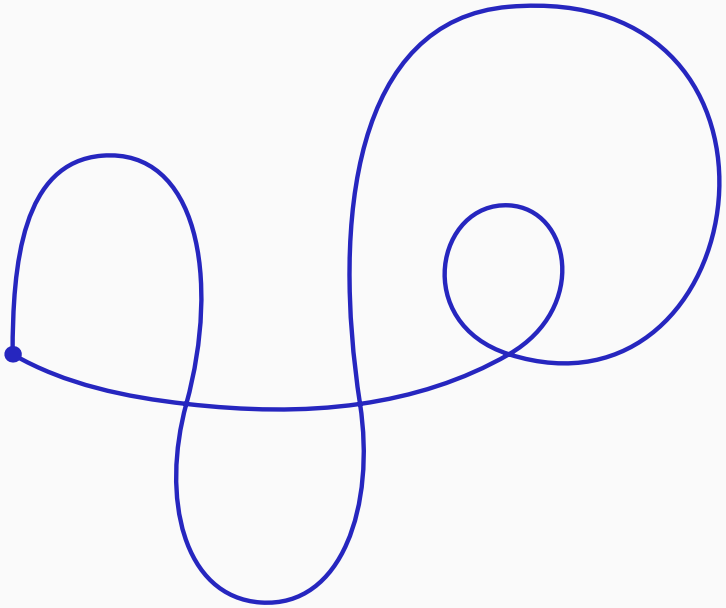
$$w_1,\ w_2,\ \ldots, w_t,\ \ldots$$

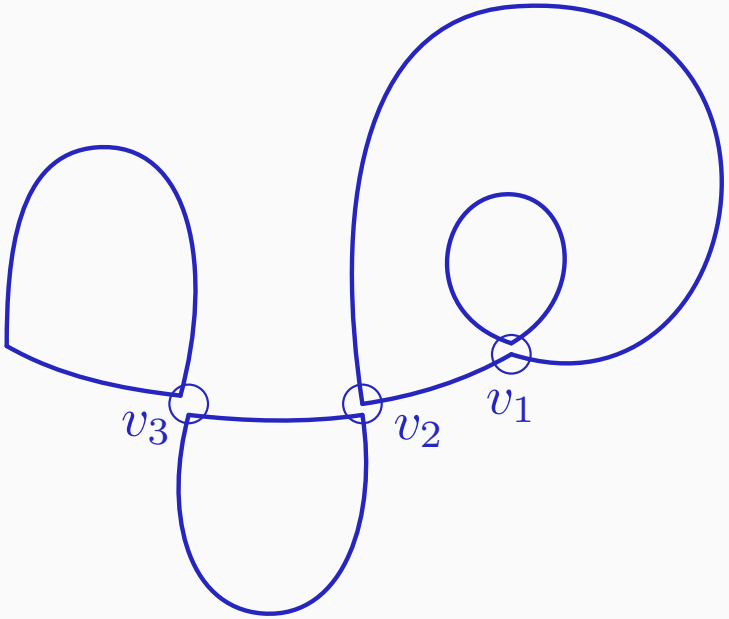
Хотя бы одна вершина v^* встречается в этой партии бесконечно часто. Суммы весов между последовательными посещениями v^* — это длины циклов, они положительны.

Нюанс

Буквально предыдущее рассуждение показывает, что результат партии неотрицательный (верхний предел положительных чисел может оказаться нулём).

Уточнить рассуждение нетрудно: вес любого цикла является суммой весов простых циклов (все вершины разные).





Доказательство леммы о сводимости PG к MPG

Из формулы

$$w(u,v) = (-1)^{p(u,v)} M^{p(u,v)}, \quad \text{где } M = n+1.$$

следует, что простой цикл чётный тогда и только тогда, когда его вес положительный.

Из основной теоремы о циклических играх следует, что у игры $\mathfrak{G}'$ есть цена $\mathrm{val}(\mathfrak{G}')$.

Пусть $\mathrm{val}(\mathfrak{G}') > 0$ (случай $\mathrm{val}(\mathfrak{G}') \leqslant 0$ аналогичен). Граф стратегии Макса, гарантирующей эту цену, не содержит циклов неположительного веса (иначе Мин использовал бы такой цикл, чтобы достичь неположительного результата). Поэтому граф той же стратегии, но в игре чётности, содержит только чётные циклы. Чёт выигрывает, придерживаясь этой стратегии.

Доказательство леммы о сводимости PG к MPG

Из формулы

$$w(u,v) = (-1)^{p(u,v)} M^{p(u,v)}, \quad \text{где } M = n+1.$$

следует, что простой цикл чётный тогда и только тогда, когда его вес положительный.

Из основной теоремы о циклических играх следует, что у игры $\mathfrak{G}'$ есть цена $\mathrm{val}(\mathfrak{G}')$.

Пусть $\mathrm{val}(\mathfrak{G}') > 0$ (случай $\mathrm{val}(\mathfrak{G}') \leqslant 0$ аналогичен). Граф стратегии Макса, гарантирующей эту цену, не содержит циклов неположительного веса (иначе Мин использовал бы такой цикл, чтобы достичь неположительного результата). Поэтому граф той же стратегии, но в игре чётности, содержит только чётные циклы. Чёт выигрывает, придерживаясь этой стратегии.

Доказательство леммы о сводимости PG к MPG

Из формулы

$$w(u,v) = (-1)^{p(u,v)} M^{p(u,v)}, \quad \text{где } M = n+1.$$

следует, что простой цикл чётный тогда и только тогда, когда его вес положительный.

Из основной теоремы о циклических играх следует, что у игры $\mathfrak{G}'$ есть цена $\mathrm{val}(\mathfrak{G}')$.

Пусть $\mathrm{val}(\mathfrak{G}') > 0$ (случай $\mathrm{val}(\mathfrak{G}') \leqslant 0$ аналогичен). Граф стратегии Макса, гарантирующей эту цену, не содержит циклов неположительного веса (иначе Мин использовал бы такой цикл, чтобы достичь неположительного результата). Поэтому граф той же стратегии, но в игре чётности, содержит только чётные циклы. Чёт выигрывает, придерживаясь этой стратегии.