Теория игр

Сергей Николенко

Теория экономических механизмов — ИТМО, весна 2008

Outline

Что такое дизайн механизмов?

- Дизайн механизмов (mechanism design) основан на *теории игр* и немножко computer science.
- Теория игр изучает взаимодействие между агентами, при котором каждый агент действует пытается выбрать стратегию, максимизирующую его собственную прибыль.
- А дизайн механизмов — это конструктивный подход: как создать такой механизм взаимодействия, при котором эгоистические действия каждого из агентов в сумме приведут к решению, оптимальному с точки зрения общей целевой функции?

Аукционы

- Главный пример дизайна механизмов — аукционы.
- Какая цель? В обычном аукционе:
  - либо организатор пытается максимизировать общую прибыль (social welfare),
  - либо продавец пытается сделать такой аукцион, чтобы продать подороже;
  - кроме того, хочется достичь ситуации, при которой выявляются истинные предпочтения участников (truthfulness);
  - и, конечно, решение должно быть в каком-либо смысле оптимальным и/или устойчивым, иначе оно не сможет реализоваться.

История

- Вообще слово «mechanism» в этом контексте ввёл Лео Гурвиц (Leo Hurwicz).
  - Гурвиц родился в Москве в 1917 году, жил в Польше, но оттуда в 1940, ясное дело, пришлось эмигрировать...
  - В 1960 он сформулировал основные положения теории экономических механизмов, в 1972 сформулировал свойство правдивости; вскоре последовал принцип выявления, и с него-то всё и началось.

История

- Дальше Эрик Маскин (Eric Maskin) начал implementation theory — то есть, собственно, mechanism design: как сделать такой протокол, чтобы он обладал нужными свойствами.
- А потом Роджер Майерсон (Roger Myerson) применил это всё к аукционам и окончательно оформил поле деятельности.

Nobel Prize 2007

- За это им всем троим и дали Нобелевскую премию 2007 года по экономике.
- Сначала, кстати, в 1994 премию дали Нэшу за разработку теории игр, которая, конечно, будет ключевой для всей этой науки.

Реальные применения

- Как известно, интернет-компании (Google, Yahoo) делают почти все свои деньги на рекламе. Реклама же продаётся через систему аукционов, использующую последние достижения дизайна механизмов. Это, наверное, самый близкий нам пример.
- Ebay.
- Общественно полезные работы — нужно максимизировать social welfare, но участники-то всё равно эгоистичные.
- Налогообложение: какую систему налогообложения ввести, чтобы максимизировать доход государства и social welfare?

Реальные применения

- Есть и менее прямые и очевидные примеры применений, например, компьютерные распределённые системы:
  - real-time scheduling: к распределённой системе приходят всё новые и новые задачи (заранее неизвестные), нужно как можно больше задач решить в срок;
  - *Nobel powered* BitTorrent client: как сделать так, чтобы участникам p2p-сети было выгодно делиться файлами, максимизируя при этом суммарную доступность файлов сети?
- Аукционы на радиочастоты (3G auctions).

Что мы будем изучать

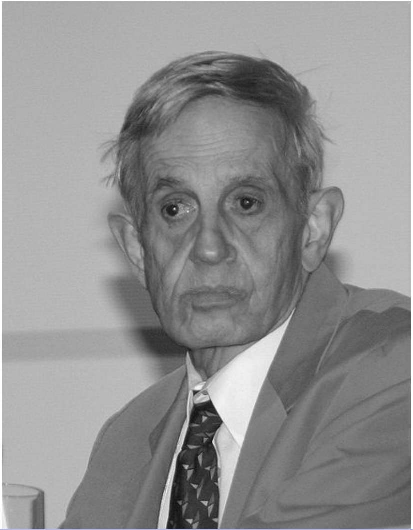
- Аукционы: постановка задачи, пара примеров, теорема о выявлении.
- Эффективные и оптимальные аукционы.
- Impossibility results.
- Worst-case аукционы, online аукционы.
- ... :)

Outline

История

- Тоже молодая наука, хотя и постарше теории экономических механизмов.
- Начало — Антуан Огюстен Курно, 1838.
- Потом биологи, например, Рональд Фишер (хотя он же и статистик): естественный отбор и всё такое.

История



- Математически — фон Нейман и Моргенштерн.
- К экономике стал применять Джон Нэш.

Определение

- Что такое игра?

Определение

Определение

Стратегическая игра — это тройка $\langle \mathcal{I}, \{S_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{u_i\}_{i\in\mathcal{I}} \rangle$*, где:*

1. $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ *— конечное множество игроков;*
2. $\{S_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *— множество доступных игрокам действий (стратегий), где* S_i *— множество действий, доступных игроку* i*; вектор* $(s_1, \dots, s_N) = (s_i, \mathbf{s}_{-i}) \in \mathbf{S}$ *будем называть профилем действий, или исходом;*
3. $\{u_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *— множество функций выплат* $u_i : \mathbf{S} \to \mathbb{R}$.

Определение

Определение

Стратегическая игра — это тройка $\langle \mathcal{I}, \{S_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{u_i\}_{i\in\mathcal{I}} \rangle$, *где:*

1. $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ *— конечное множество игроков;*
2. $\{S_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *— множество доступных игрокам действий (стратегий), где* S_i *— множество действий, доступных игроку* i; *вектор* $(s_1, \dots, s_N) = (s_i, \mathbf{s}_{-i}) \in \mathbf{S}$ *будем называть профилем действий, или исходом;*
3. $\{u_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *— множество функций выплат* $u_i : \mathbf{S} \to \mathbb{R}$.

- Шахматы или го — это стратегические игры? Как их анализировать с точки зрения теории игр? Что такое *стратегия* в шахматах?

Матричные игры

- Если игроков два, действий конечное (ну, счётное) число и выигрыш первого равен проигрышу второго, можно нарисовать матрицу игры.
-

$$\begin{array}{c|ccc} & s'_1 & \dots & s'_m \\ \hline s_1 & u(s_1, s'_1) & \dots & u(s_1, s'_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & u(s_n, s'_1) & \dots & u(s_n, s'_m) \end{array}$$

Камень, ножницы, бумага

- Рассмотрим игру «камень–ножницы–бумага». Какая у неё будет матрица?

Камень, ножницы, бумага

- Рассмотрим игру «камень–ножницы–бумага». Какая у неё будет матрица?
-

	Камень	Ножницы	Бумага
Камень	0	1	−1
Ножницы	−1	0	1
Бумага	1	−1	0

- И как тут с выигрышными (детерминированными) стратегиями? И что это вообще такое?

Полковник Блотто

- Ещё пример — *игра полковника Блотто*.
- Полковник должен распределить свои силы (M солдат) между несколькими участками поля боя (S участков).
- Его противник тоже должен сделать то же самое (его количество солдат может отличаться). Выигрывает тот, кто победит на большем количестве участков боя (или тот, кто уничтожит больше солдат противника).

Полковник Блотто

- Например, пусть участков боя в игре три, солдат у Блотто и его противника тоже по три.
- Какие тогда стратегии?

Полковник Блотто

- Например, пусть участков боя в игре три, солдат у Блотто и его противника тоже по три.
- Какие тогда стратегии?
- $$\begin{array}{ccccc} (3,0,0), & (2,1,0), & (2,0,1), & (1,2,0), & (1,1,1), \\ (1,0,2), & (0,3,0), & (0,2,1), & (0,1,2), & (0,0,3). \end{array}$$
- А матрица какая?

Полковник Блотто

-

	(3,0,0)	(2,1,0)	(2,0,1)	(1,2,0)	(1,1,1)	(1,0,2)	(0,3,0)	(0,2,1)	(0,1,2)	(0,0,3)
(3,0,0)	0	0	0	0	−1	0	0	−1	−1	0
(2,1,0)	0	0	0	0	0	1	0	−1	0	1
(2,0,1)	0	0	0	1	0	0	1	0	−1	0
(1,2,0)	0	0	−1	0	0	0	0	0	1	1
(1,1,1)	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
(1,0,2)	0	−1	0	0	0	0	1	1	0	0
(0,3,0)	0	0	−1	0	−1	−1	0	0	0	0
(0,2,1)	1	1	0	0	0	−1	0	0	0	0
(0,1,2)	1	0	1	−1	0	0	0	0	0	0
(0,0,3)	0	−1	0	−1	−1	0	0	0	0	0

Конкуренция по Курно

- И ещё один пример — теперь непрерывный.
- Рассмотрим рынок некоторого продукта, на котором находятся ровно две фирмы: $\mathcal{I} = \{1, 2\}$.
- Стратегия каждого из участников — количество продукта, которое он производит: $s_i \in [0, \infty)$.
- Пусть $p(q)$ — функция, по которой определяется цена, а c_i — цена за единицу для компании i. Какая тогда у компаний прибыль?

Конкуренция по Курно

- Прибыль каждого участника — это его общий доход за вычетом себестоимости:

$$u_i(s_1, s_2) = s_i p(s_1 + s_2) - c_i s_i.$$

- Рассмотрим в качестве функции p

$$p(q) = \begin{cases} 2 - q, & q \leq 2, \\ 0, & q > 2. \end{cases}$$

- И пусть $c_1 = c_2 = 1$.
- Как лучше всего фирмам играть в такую игру?

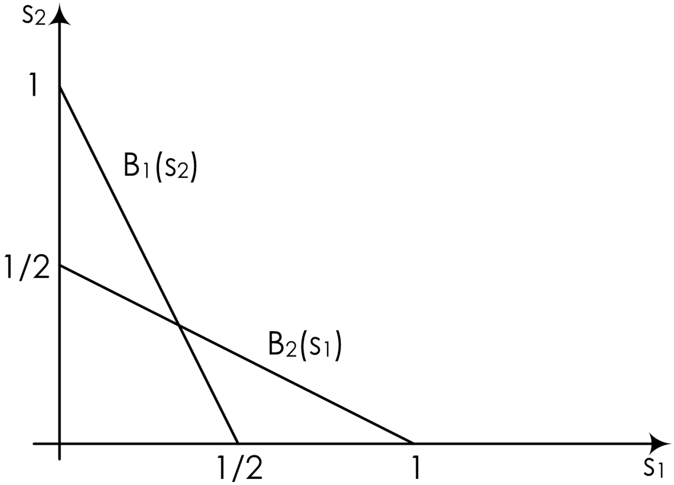
Конкуренция по Курно

- Пусть игрок 2 произвёл товара s_2. Построим оптимальную стратегию для игрока 1.
- Если $s_2 > 2$ (да и > 1), то производить ничего не надо.
- Если же $s_2 \in [0, 1]$, то оптимальную стратегию придётся искать так:

$$B_1(s_2) = \arg\max_{s_1 \geq 0}(s_1(2 - s_1 - s_2) - s_1) =$$

$$= \arg\max_{s_1 \geq 0}(-s_1^2 + s_1(1 - s_2)) = \frac{1 - s_2}{2}.$$

Конкуренция по Курно



Outline

Доминируемые стратегии

- Что же делать участвующим в игре агентам? Как им определить, какая стратегия лучше других?
- Давайте для начала поставим перед собой более скромную цель: определить, какие стратегии точно не подойдут.
- Какие, кстати?

Доминируемые стратегии

Определение

Стратегия $s \in S_i$ агента i называется доминируемой, если существует такая стратегия $s' \in S_i$, что

$$\forall \mathbf{s}_{-i} \in \mathbf{S}_{-i} \quad u_i(s', \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(s, \mathbf{s}_{-i}).$$

В таком случае говорят, что s' доминирует над s.

- Стратегия s доминируема, если существует s', которая не хуже при любых возможных комбинациях стратегий других агентов.

Доминируемые стратегии

- В игре полковника Блотто после удаления доминируемых стратегий останется уже не так много.

	$(2,1,0)$	$(2,0,1)$	$(1,2,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,2)$	$(0,2,1)$	$(0,1,2)$
$(2,1,0)$	0	0	0	0	1	−1	0
$(2,0,1)$	0	0	1	0	0	0	−1
$(1,2,0)$	0	−1	0	0	0	0	1
$(1,1,1)$	0	0	0	0	0	0	0
$(1,0,2)$	−1	0	0	0	0	1	0
$(0,2,1)$	1	0	0	0	−1	0	0
$(0,1,2)$	0	1	−1	0	0	0	0

Доминантные стратегии

Определение

Стратегия $s \in S_i$ *агента* i *называется доминантной, если всякая другая стратегия* $s' \in S_i$ *ею доминируется, то есть*

$$\forall s' \in S_i \ \forall \mathbf{s}_{-i} \in \mathbf{S}_{-i} \quad u_i(s, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(s', \mathbf{s}_{-i}).$$

Доминантные стратегии

- Доминантная стратегия для агента — настоящее счастье. Ему вообще думать не надо: достаточно выбрать доминантную стратегию, всё равно никакая другая ни при каком исходе ничего лучшего не даст.
- Более того, если у всех агентов есть доминантные стратегии, то анализ такой игры закончится, не успев начаться. Можно с уверенностью сказать, что все агенты выберут свои доминантные стратегии.

Равновесие в доминантных стратегиях

Определение

Равновесие в доминантных стратегиях для стратегической игры $\langle \mathcal{I}, \{S_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{u_i\}_{i\in\mathcal{I}} \rangle$ — это такой профиль стратегий $\mathbf{s}^* \in S$, что для всякого агента $i \in \mathcal{I}$ стратегия s_i^* является доминантной.

- Это самое устойчивое равновесие из всех.
- Но бывает далеко не всегда.

Равновесие Нэша

- А что делать, когда ~~зубная щётка~~ доминантные стратегии недоступны?
- Тогда приходится учитывать не только свои собственные стратегии, но и стратегии других агентов.

Равновесие Нэша

Определение

Равновесие Нэша в чистых стратегиях для стратегической игры $\langle \mathcal{I}, \{S_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{u_i\}_{i\in\mathcal{I}} \rangle$ — это такой профиль стратегий $\mathbf{s}^* \in S$, что для всякого агента $i \in \mathcal{I}$ выполняется следующее условие:

$$\forall s_i \in S_i \quad u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*).$$

- Как и прежде, агенту невыгодно отклоняться от избранной стратегии s_i^*.
- Но теперь ему это невыгодно делать не при любом выборе стратегий у других агентов, а только в конкретном профиле $\mathbf{s}^*$.

Пример

- Вспомним матрицу игры полковника Блотто.
- Если один игрок выбирает стратегию $(1,1,1)$, то от выбора другого уже ничего не зависит, то есть можно сказать, что другому тоже нет резона отклоняться от стратегии $(1,1,1)$.
- Иначе говоря, для данной игры профиль стратегий $((1,1,1),(1,1,1))$ находится в равновесии Нэша.
- Вопрос: а что с «камнем–ножницами–бумагой»?

Еще пример

- Будет ли равновесие Нэша (и где) у конкуренции по Курно?
- Пусть цена задаётся неизвестной функцией $P(s_1 + s_2)$, а себестоимость производства для каждой фирмы — неизвестной функцией $C_i(s_i)$.
- Как найти равновесие Нэша?

Еще пример

- Найдём опять функцию лучшего ответа. Прибыль:

$$\Pi_i(s_1, s_2) = s_i P(s_1 + s_2) - C_i(s_i).$$

- Нужно найти максимум Π_i для фиксированного s_{3-i}.

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial s_i} = \frac{\partial P(s_1 + s_2)}{\partial s_i} s_i - P(s_1 + s_2) - \frac{\partial C_i(s_i)}{\partial s_i}.$$

- Значит, равновесие достигается на решениях системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial s_1} = \frac{\partial P(s_1 + s_2)}{\partial s_1} s_1 - P(s_1 + s_2) - \frac{\partial C_1(s_1)}{\partial s_1} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial s_2} = \frac{\partial P(s_1 + s_2)}{\partial s_i} s_2 - P(s_1 + s_2) - \frac{\partial C_2(s_2)}{\partial s_2} &= 0. \end{aligned}$$

Outline

Смешанные стратегии

Определение

Смешанная стратегия для игрока i в стратегической игре $\langle \mathcal{I}, \{S_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{u_i\}_{i\in\mathcal{I}} \rangle$ — это распределение вероятностей $\sigma_i \in \Sigma_i$, где Σ_i — множество всех распределений вероятностей над S_i.

Смешанные стратегии

- Бывают игры, где нет равновесий Нэша для чистых стратегий.
- Но оно всегда (в конечном случае) есть в смешанных стратегиях.
- Где будет равновесие для игры «камень-ножницы-бумага»?

	Камень	Ножницы	Бумага
Камень	0	1	−1
Ножницы	−1	0	1
Бумага	1	−1	0

Смешанные стратегии

- Предположим, что второй игрок выбирает камень, ножницы или бумагу с вероятностью $\frac{1}{3}$, а первый выбирает их с вероятностями p, q и $1-p-q$.
- Тогда первый игрок выигрывает, проигрывает и делает ничью с вероятностью

$$\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}q+\frac{1}{3}(1-p-q)=\frac{1}{3}.$$

- То есть если противник выбирает стратегию равновероятно, для игрока все стратегии эквивалентны.
- Поскольку игра симметрична, получается, что профиль смешанных стратегий

$$\left[\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right]$$

находится в равновесии.

Теорема Какутани

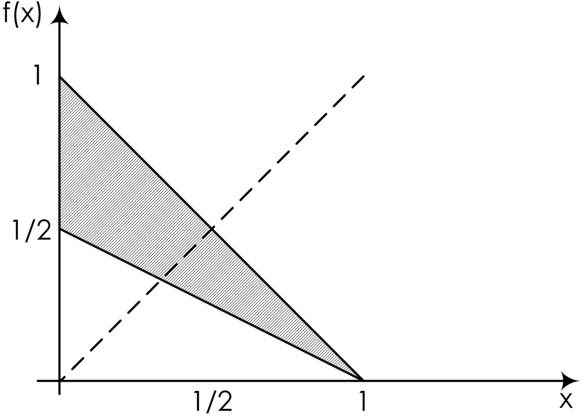
- Существование равновесия в смешанных стратегиях следует из теоремы Какутани о неподвижной точке.

Теорема (Какутани)

Пусть S — непустое выпуклое компактное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а $\phi : S \to 2^S$ — многозначная функция на S с замкнутым графиком, такая, что множество $\phi(\mathbf{x})$ непусто, замкнуто и выпукло для всех $\mathbf{x} \in S$. Тогда у ϕ есть неподвижная точка: $\exists \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \phi(\mathbf{x})$.

Теорема Какутани

- Вот, например, функция $f(x) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x, 1 - x\right]$ на $[0, 1]$.

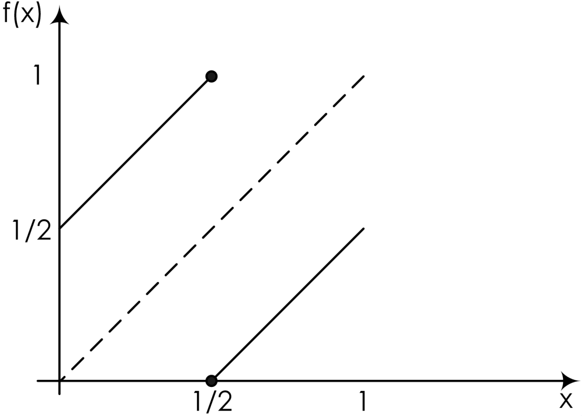


Теорема Какутани

- Можете привести пример, когда график невыпуклый, и из-за этого теорема нарушается?

Теорема Какутани

- Можете привести пример, когда график невыпуклый, и из-за этого теорема нарушается?



Теорема Какутани

- А как отсюда следует существование равновесия?

Теорема Какутани

- Рассмотрим в качестве функции ϕ отображение $\phi : \boldsymbol{S} \to 2^{\boldsymbol{S}}$, которое вектор (смешанных) стратегий $\boldsymbol{s}$ отображает в новый вектор стратегий $\boldsymbol{s}^*$ так, что для любого i стратегия s_i^* является наилучшим ответом на $\boldsymbol{s}_{-i}$.
- Почему график будет выпуклым?
- Почему неподвижная точка будет равновесием Нэша?

Ещё пример

- Рассмотрим ещё пример, весьма жизненный — «Семейный спор» (Battle of the sexes).
- Рассмотрим семью из двух человек, которая пытается решить, куда пойти вечером.
- Муж хочет идти на футбол, жена пытается вытащить мужа в театр.
- Но за семью можно быть спокойным: и муж, и жена прежде всего хотят провести вечер вместе.
- Теперь самое противоестественное предположение: муж и жена не обсуждают друг с другом свои решения, а просто сами по себе идут или на футбол, или в театр.

Ещё пример

- Получается вот такая, например, матрица:

	Футбол	Театр
Футбол	$(5, 2)$	$(0, 0)$
Театр	$(0, 0)$	$(2, 5)$

- Как тут с равновесиями Нэша?

Ещё пример

- Получается вот такая, например, матрица:

	Футбол	Театр
Футбол	$(5, 2)$	$(0, 0)$
Театр	$(0, 0)$	$(2, 5)$

- Как тут с равновесиями Нэша?
- Их два. Но любое из них нечестное!
- Может быть, в смешанных стратегиях будет лучше?

Ещё пример

- Сыграем за мужа: найдём для данной вероятности q того, что жена пойдёт на футбол, оптимальную вероятность p пойти на футбол самому:

$$\boldsymbol{E}[\text{выгода мужа}] = 5pq + 2(1-p)(1-q) = p(7q-2) + 2 - 2q.$$

- Поскольку игра симметрична, понятно, что в точке $p = \frac{5}{7}$, $q = \frac{2}{7}$ (каждый выбирает своё личное предпочтение с вероятностью $\frac{5}{7}$) достигается равновесие в смешанных стратегиях
- В итоге ожидаемая выгода и мужа, и жены оказывается равна

$$p(7q-2) + 2 - 2q = 2 - \frac{4}{7} = \frac{10}{7}.$$

Ещё пример

- Сыграем за мужа: найдём для данной вероятности q того, что жена пойдёт на футбол, оптимальную вероятность p пойти на футбол самому:

$$\boldsymbol{E}[\text{выгода мужа}] = 5pq + 2(1-p)(1-q) = p(7q-2) + 2 - 2q.$$

- Поскольку игра симметрична, понятно, что в точке $p = \frac{5}{7}$, $q = \frac{2}{7}$ (каждый выбирает своё личное предпочтение с вероятностью $\frac{5}{7}$) достигается равновесие в смешанных стратегиях
- В итоге ожидаемая выгода и мужа, и жены оказывается равна

$$p(7q-2) + 2 - 2q = 2 - \frac{4}{7} = \frac{10}{7}.$$

- Но $\frac{10}{7}$ даже меньше двух! Что же делать?

Совместные смешанные стратегии

Определение

Совместная смешанная стратегия игроков — это распределение вероятностей на всём множестве возможных чистых стратегий всех игроков $\boldsymbol{S}$.

- Муж и жена заранее договариваются: кто-то вечером подбросит монетку, и если выпадет орёл, то они вместе пойдут в театр, а если решка — на футбол. В такой ситуации исход получается оптимальным: и точку $(0, 0)$ выбирать никогда не придётся, и равновесие честное: у каждого участника ожидаемая выгода равна $\frac{7}{2}$.

Равновесие в оных

Определение

Равновесие в совместных смешанных стратегиях — это такое распределение вероятностей p на множестве чистых стратегий $\mathbf{S}$, что для всех $i \in \mathcal{I}$ и любой пары векторов $s_i, s_i' \in \mathbf{S}$

$$\sum_{\mathbf{s}_{-i}} p(s_i, \mathbf{s}_{-i}) u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \geq \sum_{\mathbf{s}_{-i}} p(s_i, \mathbf{s}_{-i}) u_i(s_i', \mathbf{s}_{-i}),$$

или, что то же самое,

$$\sum_{\mathbf{s}_{-i}} p(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \left(u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) - u_i(s_i', \mathbf{s}_{-i}) \right) \geq 0.$$

Равновесие в оных

- Некое внешнее устройство выбирает стратегию $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ случайным образом по распределению p, и оказывается так, что для каждого из игроков в получившемся векторе невыгодно отклоняться от своей стратегии.
- Совместные смешанные стратегии — это способ перейти от одного равновесия Нэша к линейной комбинации нескольких равновесий, если эта комбинация оказывается более выгодна агентам.

От всеведения к недостатку информации

- До сих пор мы рассматривали исключительно игры, в которых все агенты знали всё на свете.
- Каждый агент знал функции выплаты u_i других агентов, знал множества стратегий других игроков S_i.
- Более того, каждый агент знал, что каждый другой агент это знает, и что каждый другой агент знает, что он знает, что...

От всеведения к недостатку информации

- На самом деле это условие довольно часто не выполняется.
- А если агент не знает, к примеру, какие выплаты у других агентов, то говорить о равновесии Нэша становится бессмысленным.
- Что же делать?

Дополняем модель игры

Определение

Стратегическая игра с неполной информацией — это четвёрка $\langle \mathcal{I}, \{S_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{\Theta_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{u_i\}_{i\in\mathcal{I}} \rangle$, *где:*

1. $\mathcal{I} = \{1, \ldots, N\}$ — *конечное множество игроков;*
2. $\{S_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ — *множество доступных игрокам действий;*
3. $\{\Theta_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ — *множество типов игроков. Обозначим* $\boldsymbol{\Theta} = \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_N$. *Каждому игроку* i *известен его собственный тип* θ_i *и общее распределение* $p(\boldsymbol{\Theta})$, *из которого берутся типы всех остальных; в частности, игрок* i *знает* $p(\theta_{-i} \mid \theta_i) = p(\theta_i, \theta_{-i})/p(\theta_i)$.
4. $\{u_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ — *множество функций выплат* $u_i : \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\Theta} \to \mathbb{R}$. *Функции выплат теперь зависят не только от стратегий, но и от типов.*

Равновесие по Байесу-Нэшу

- В играх с неполной информацией игроки не знают типов других игроков, но знают распределение.
- Поэтому равновесие теперь будет в ожидании.

Определение

Равновесие по Байесу-Нэшу для стратегической игры с неполной информацией $\langle \mathcal{I}, \{S_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{\Theta_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{u_i\}_{i\in\mathcal{I}} \rangle$ *— это такой профиль стратегий* $\mathbf{s}^* \in S$*, что для всякого агента* $i \in \mathcal{I}$ *и всякого его типа* $\theta_i \in \Theta_i$ *выполняется следующее условие:*

$$s_i^* \in \arg\max_{s_i' \in S_i} \sum_{\theta_{-i}} p(\theta_{-i} \mid \theta_i) u_i(s_i', \mathbf{s}_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i}).$$

Спасибо за внимание!

- Lecture notes и слайды будут появляться на моей homepage:

  `http://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/index.php?page=teaching`
- Присылайте любые замечания, решения упражнений, новые численные примеры и прочее по адресам: `sergey@logic.pdmi.ras.ru`, `snikolenko@gmail.com`
- Заходите в ЖЖ smartnik.