Алгоритмическая теория игр
Лекция 7

М.Н. Вялый

Лекции в Computer Science club (Санкт-Петербург), 2019

Языки, связанные с решением игр

Описание $\langle G \rangle$ игры G

Двоичное слово, кодирующее граф игры, разбиение вершин на множества, контролируемые игроками, начальную вершину, веса рёбер (целочисленные) и (для DPG) параметр затухания (рациональное число).

Решение циклических игр (игр с затухающим платежом)

Дана игра. Найти оптимальные стратегии и цену игры.

Языки

$$\mathrm{DPG} = \{\langle G \rangle : \text{цена DPG } G \text{ положительная,}\}$$

$$\mathrm{MPG} = \{\langle G \rangle : \text{цена MPG } G \text{ положительная.}\}$$

Языки, связанные с решением игр

Описание $\langle G \rangle$ игры G

Двоичное слово, кодирующее граф игры, разбиение вершин на множества, контролируемые игроками, начальную вершину, веса рёбер (целочисленные) и (для DPG) параметр затухания (рациональное число).

Решение циклических игр (игр с затухающим платежом)

Дана игра. Найти оптимальные стратегии и цену игры.

Языки

$$\mathrm{DPG} = \{\langle G \rangle : \text{цена DPG } G \text{ положительная,}\}$$

$$\mathrm{MPG} = \{\langle G \rangle : \text{цена MPG } G \text{ положительная.}\}$$

Языки, связанные с решением игр

Описание $\langle G \rangle$ игры G

Двоичное слово, кодирующее граф игры, разбиение вершин на множества, контролируемые игроками, начальную вершину, веса рёбер (целочисленные) и (для DPG) параметр затухания (рациональное число).

Решение циклических игр (игр с затухающим платежом)

Дана игра. Найти оптимальные стратегии и цену игры.

Языки

$$\mathrm{DPG} = \{\langle G \rangle : \text{цена DPG } G \text{ положительная,}\}$$

$$\mathrm{MPG} = \{\langle G \rangle : \text{цена MPG } G \text{ положительная.}\}$$

Полиномиальная сводимость по Тьюрингу

Определение

Алгоритм с оракулом L: имеет возможность вызова алгоритма разрешения языка L. При подсчёте времени работы алгоритма с оракулом считается, что исполнение этой процедуры занимает 1 такт работы.

Лемма

Существует полиномиальный алгоритм решения игр с затухающим платежом с оракулом DPG.

Полиномиальная сводимость по Тьюрингу

Определение

Алгоритм с оракулом L: имеет возможность вызова алгоритма разрешения языка L. При подсчёте времени работы алгоритма с оракулом считается, что исполнение этой процедуры занимает 1 такт работы.

Лемма

Существует полиномиальный алгоритм решения игр с затухающим платежом с оракулом DPG.

Цены игр со смещёнными весами

Наблюдение 1

Если прибавить ко всем весам Δ, то результат любой партии игры (и цена игры) изменится на

$$(1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\Delta = \Delta.$$

Наблюдение 2

Результат любой партии DPG лежит в интервале $[-W; W]$, где W обозначает максимум модуля весов рёбер.

Цены игр со смещёнными весами

Наблюдение 1

Если прибавить ко всем весам Δ, то результат любой партии игры (и цена игры) изменится на

$$(1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\Delta = \Delta.$$

Наблюдение 2

Результат любой партии DPG лежит в интервале $[-W; W]$, где W обозначает максимум модуля весов рёбер.

Приближённое вычисление цены игры

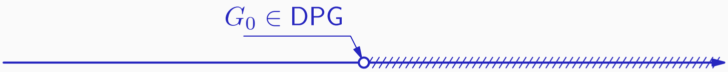
G_Δ — игра, в которой к весам всех рёбер игры G добавили $-\Delta$. Приблизить цену игры можно двоичным поиском.

Утверждение

Приблизить цену игры с точностью ε можно за $\mathrm{poly}\left(n, \log(W/\varepsilon)\right)$ проверок цены игры на положительность.

Приближённое вычисление цены игры

G_Δ — игра, в которой к весам всех рёбер игры G добавили $-\Delta$. Приблизить цену игры можно двоичным поиском.

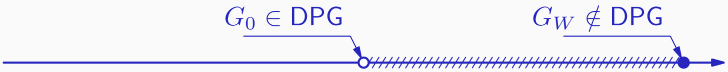


Утверждение

Приблизить цену игры с точностью ε можно за $\mathrm{poly}\left(n, \log(W/\varepsilon)\right)$ проверок цены игры на положительность.

Приближённое вычисление цены игры

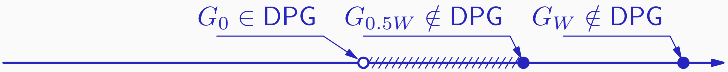
G_Δ — игра, в которой к весам всех рёбер игры G добавили $-\Delta$. Приблизить цену игры можно двоичным поиском.



Утверждение

Приблизить цену игры с точностью ε можно за $\mathrm{poly}\left(n, \log(W/\varepsilon)\right)$ проверок цены игры на положительность.

G_Δ — игра, в которой к весам всех рёбер игры G добавили $-\Delta$. Приблизить цену игры можно двоичным поиском.

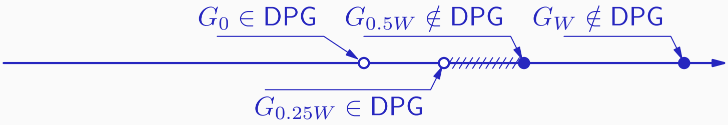


Утверждение

Приблизить цену игры с точностью ε можно за $\mathrm{poly}\left(n, \log(W/\varepsilon)\right)$ проверок цены игры на положительность.

Приближённое вычисление цены игры

G_Δ — игра, в которой к весам всех рёбер игры G добавили $-\Delta$. Приблизить цену игры можно двоичным поиском.

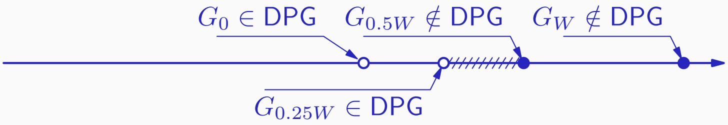


Утверждение

Приблизить цену игры с точностью ε можно за $\mathrm{poly}\left(n, \log(W/\varepsilon)\right)$ проверок цены игры на положительность.

Приближённое вычисление цены игры

G_Δ — игра, в которой к весам всех рёбер игры G добавили $-\Delta$. Приблизить цену игры можно двоичным поиском.

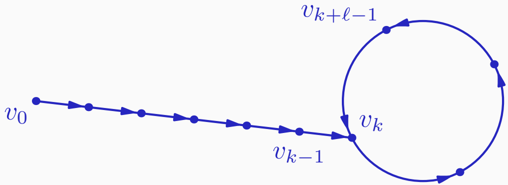


Утверждение

Приблизить цену игры с точностью ε можно за $\mathrm{poly}\left(n, \log(W/\varepsilon)\right)$ проверок цены игры на положительность.

Цена игры как результат одной партии

Для любой DPG существуют оптимальные позиционные стратегии. Если игроки придерживаются этих стратегий, партия выходит на бесконечный цикл.



Цена игры рациональная

Формула для цены игры

$$\mathrm{Val}(G) = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^i w(v_i, v_{i+1}) + (1-\lambda)\lambda^k \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i\ell} w(C) =$$

$$= (1-\lambda)\sum_{i=0}^{k}\lambda^i w(v_i, v_{i+1}) + \frac{1-\lambda}{1-\lambda^\ell}\lambda^k w(C),$$

$w(C)$ — вес предельного цикла с учётом затухания:

$$w(C) = \sum_{i=0}^{\ell-1}\lambda^i w(v_{k+i}, v_{k+i+1}).$$

Оценка знаменателя цены игры

Утверждение

Пусть $\lambda = p/q$ — представление параметра затухания в виде несократимой дроби. Тогда знаменатель Q дроби, представляющей $\mathrm{Val}(G)$, не превосходит $q^{k+2\ell}p^{\ell}$.

Доказательство

$$\mathrm{Val}(G) = \frac{\text{целое}}{q^{k+1}} + \frac{\text{целое}}{q^{k+1}(q^{\ell} - p^{\ell})} \cdot \frac{\text{целое}}{q^{\ell-1}}$$

Точное восстановление цены игры

Теорема

По конечной двоичной дроби a, приближающей рациональное число p/q с аддитивной точностью $\varepsilon < 1/(2q^2)$, однозначно восстанавливаются числитель p и знаменатель q. Их можно найти за время, полиномиально ограниченное длиной a.

Идея доказательства

Разложение в цепную дробь.

Как найти точно цену игры

Знаменатель $Q \leqslant q^{k+2\ell}p^{\ell} < (pq)^{3n}$.

Найдём цену игры с точностью $1/(2Q^{2n}) < (pq)^{-6n}/2$ и восстановим её точно с помощью цепных дробей.

Точное восстановление цены игры

Теорема

По конечной двоичной дроби a, приближающей рациональное число p/q с аддитивной точностью $\varepsilon < 1/(2q^2)$, однозначно восстанавливаются числитель p и знаменатель q. Их можно найти за время, полиномиально ограниченное длиной a.

Идея доказательства

Разложение в цепную дробь.

Как найти точно цену игры

Знаменатель $Q \leqslant q^{k+2\ell}p^{\ell} < (pq)^{3n}$.

Найдём цену игры с точностью $1/(2Q^{2n}) < (pq)^{-6n}/2$ и восстановим её точно с помощью цепных дробей.

Точное восстановление цены игры

Теорема

По конечной двоичной дроби a, приближающей рациональное число p/q с аддитивной точностью $\varepsilon < 1/(2q^2)$, однозначно восстанавливаются числитель p и знаменатель q. Их можно найти за время, полиномиально ограниченное длиной a.

Идея доказательства

Разложение в цепную дробь.

Как найти точно цену игры

Знаменатель $Q \leqslant q^{k+2\ell}p^{\ell} < (pq)^{3n}$.

Найдём цену игры с точностью $1/(2Q^{2n}) < (pq)^{-6n}/2$ и восстановим её точно с помощью цепных дробей.

Построение оптимальных стратегий

Для ребра $(uv) \in E(G)$ построим вспомогательную игру G' на графе, в котором из рёбер графа G, исходящих из вершины u оставлено только ребро (uv), а веса остальных рёбер, параметр затухания и разбиение вершин на V_0, V_1 оставлены теми же самыми.

Утверждение

Если $\mathrm{Val}(G') = \mathrm{Val}(G)$, то ребро (uv) можно включить в оптимальную стратегию.

Продолжая такие проверки, после не более чем $|E(G)|$ итераций полностью определим оптимальные стратегии для игры G.

Всего $\mathrm{poly}(\mathrm{size}(\langle G \rangle))$ раз вычисляется цена DPG.

Построение оптимальных стратегий

Для ребра $(uv) \in E(G)$ построим вспомогательную игру G' на графе, в котором из рёбер графа G, исходящих из вершины u оставлено только ребро (uv), а веса остальных рёбер, параметр затухания и разбиение вершин на V_0, V_1 оставлены теми же самыми.

Утверждение

Если $\mathrm{Val}(G') = \mathrm{Val}(G)$, то ребро (uv) можно включить в оптимальную стратегию.

Продолжая такие проверки, после не более чем $|E(G)|$ итераций полностью определим оптимальные стратегии для игры G.

Всего $\mathrm{poly}(\mathrm{size}(\langle G \rangle))$ раз вычисляется цена DPG.

Построение оптимальных стратегий

Для ребра $(uv) \in E(G)$ построим вспомогательную игру G' на графе, в котором из рёбер графа G, исходящих из вершины u оставлено только ребро (uv), а веса остальных рёбер, параметр затухания и разбиение вершин на V_0, V_1 оставлены теми же самыми.

Утверждение

Если $\mathrm{Val}(G') = \mathrm{Val}(G)$, то ребро (uv) можно включить в оптимальную стратегию.

Продолжая такие проверки, после не более чем $|E(G)|$ итераций полностью определим оптимальные стратегии для игры G.

Всего $\mathrm{poly}(\mathrm{size}(\langle G \rangle))$ раз вычисляется цена DPG.

Циклические игры: то же самое

Доказали

Лемма

Существует полиномиальный алгоритм решения игр с затухающим платежом с оракулом DPG.

Аналогичная лемма

Лемма

Существует полиномиальный алгоритм решения циклических игр с оракулом MPG.

Все рассуждения сохраняются.

Оценка знаменателя дроби, представляющей цену игры, лучше: он не больше длины ℓ предельного цикла.

Циклические игры: то же самое

Доказали

Лемма

Существует полиномиальный алгоритм решения игр с затухающим платежом с оракулом DPG.

Аналогичная лемма

Лемма

Существует полиномиальный алгоритм решения циклических игр с оракулом MPG.

Все рассуждения сохраняются.

Оценка знаменателя дроби, представляющей цену игры, лучше: он не больше длины ℓ предельного цикла.

Циклические игры: то же самое

Доказали

Лемма

Существует полиномиальный алгоритм решения игр с затухающим платежом с оракулом DPG.

Аналогичная лемма

Лемма

Существует полиномиальный алгоритм решения циклических игр с оракулом MPG.

Все рассуждения сохраняются.

Оценка знаменателя дроби, представляющей цену игры, лучше: он не больше длины ℓ предельного цикла.

Сводимости

Вернёмся к играм чётности

PG — язык, состоящий из описаний тех игр чётности, в которых выигрывающая стратегия есть у Чёта.

Лемма

$\mathrm{PG} \leq_p \mathrm{MPG}$.

Сразу следует из построенной ранее сводимости игр чётности к циклическим играм.

PG — язык, состоящий из описаний тех игр чётности, в которых выигрывающая стратегия есть у Чёта.

Лемма

$\mathrm{PG} \leq_p \mathrm{MPG}$.

Сразу следует из построенной ранее сводимости игр чётности к циклическим играм.
$\mathfrak{G}$ — игра чётности $G = (V, E)$, $V = V_0 \sqcup V_1$, v_0, $p \colon E \to \{0, \ldots, d-1\}$.
$\mathfrak{G}'$ — циклическая игра с тем же графом, той же начальной позицией и тем же разбиением позиций между игроками. Веса рёбер: $w(u, v) = (-1)^{p(u,v)} M^{p(u,v)}$, где $M = n + 1$, $n = |V(G)|$.

Вернёмся к играм чётности

PG — язык, состоящий из описаний тех игр чётности, в которых выигрывающая стратегия есть у Чёта.

Лемма

PG $\leq_p$ MPG.

Сразу следует из построенной ранее сводимости игр чётности к циклическим играм.

Лемма (доказана раньше)

У Чёта существует выигрывающая позиционная стратегия в игре $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда цена игры $\mathfrak{G}'$ положительная. В противном случае выигрывающая позиционная стратегия существует у Нечета.

Замечание

Использованная сводимость не обязательно полиномиальна, если приоритеты записаны в двоичной системе. Длина записи числа $M^{p(u,v)}$ может оказаться сверхполиномиальной.

Можно потребовать, чтобы приоритеты игры чётности задавались в унарной системе. Но это необязательно.

Утверждение

Любая игра чётности сводится к игре чётности с $d = O(n^2)$, где d — максимальный приоритет, а n — количество вершин в графе игры.

Набросок доказательства

Результат партии зависит только от порядка и чётности приоритетов. Поэтому любой набор приоритетов можно «сжать» до набора из $\leqslant 2|E(G)|$ приоритетов.

Замечание

Использованная сводимость не обязательно полиномиальна, если приоритеты записаны в двоичной системе. Длина записи числа $M^{p(u,v)}$ может оказаться сверхполиномиальной.

Можно потребовать, чтобы приоритеты игры чётности задавались в унарной системе. Но это необязательно.

Утверждение

Любая игра чётности сводится к игре чётности с $d = O(n^2)$, где d — максимальный приоритет, а n — количество вершин в графе игры.

Набросок доказательства

Результат партии зависит только от порядка и чётности приоритетов. Поэтому любой набор приоритетов можно «сжать» до набора из $\leqslant 2|E(G)|$ приоритетов.

Замечание

Использованная сводимость не обязательно полиномиальна, если приоритеты записаны в двоичной системе. Длина записи числа $M^{p(u,v)}$ может оказаться сверхполиномиальной.

Можно потребовать, чтобы приоритеты игры чётности задавались в унарной системе. Но это необязательно.

Утверждение

Любая игра чётности сводится к игре чётности с $d = O(n^2)$, где d — максимальный приоритет, а n — количество вершин в графе игры.

Набросок доказательства

Результат партии зависит только от порядка и чётности приоритетов. Поэтому любой набор приоритетов можно «сжать» до набора из $\leqslant 2|E(G)|$ приоритетов.

Замечание

Использованная сводимость не обязательно полиномиальна, если приоритеты записаны в двоичной системе. Длина записи числа $M^{p(u,v)}$ может оказаться сверхполиномиальной.

Можно потребовать, чтобы приоритеты игры чётности задавались в унарной системе. Но это необязательно.

Утверждение

Любая игра чётности сводится к игре чётности с $d = O(n^2)$, где d — максимальный приоритет, а n — количество вершин в графе игры.

Набросок доказательства

Результат партии зависит только от порядка и чётности приоритетов. Поэтому любой набор приоритетов можно «сжать» до набора из $\leqslant 2|E(G)|$ приоритетов.

Игры с затухающим платежом «ещё труднее»

Лемма

MPG $\leq_p$ DPG.

Предварительный шаг: избавимся от нулевой цены

G — циклическая игра. Её цена — рациональное число, со знаменателем, не превосходящим n.

Преобразуем веса рёбер графа игры G по правилу

$$w'(u, v) = 2nw(u, v) - 1$$

и получим новую игру G'; $\mathrm{Val}(G') = 2n\,\mathrm{Val}(G) - 1$.

- Если $\mathrm{Val}(G) > 0$, то $\mathrm{Val}(G') \geqslant 2n/n - 1 = 1$.
- Если $\mathrm{Val}\, G \leqslant 0$, то $\mathrm{Val}(G') \leqslant -1$.

Игры с затухающим платежом «ещё труднее»

Лемма

$\mathrm{MPG} \le_p \mathrm{DPG}$.

Предварительный шаг: избавимся от нулевой цены

G — циклическая игра. Её цена — рациональное число, со знаменателем, не превосходящим n.

Преобразуем веса рёбер графа игры G по правилу

$$w'(u, v) = 2nw(u, v) - 1$$

и получим новую игру G'; $\mathrm{Val}(G') = 2n\,\mathrm{Val}(G) - 1$.

- Если $\mathrm{Val}(G) > 0$, то $\mathrm{Val}(G') \geqslant 2n/n - 1 = 1$.
- Если $\mathrm{Val}\, G \leqslant 0$, то $\mathrm{Val}(G') \leqslant -1$.

Игры с затухающим платежом «ещё труднее»

Лемма

$\mathsf{MPG} \le_p \mathsf{DPG}$.

Предварительный шаг: избавимся от нулевой цены

G — циклическая игра. Её цена — рациональное число, со знаменателем, не превосходящим n.

Преобразуем веса рёбер графа игры G по правилу

$$w'(u, v) = 2nw(u, v) - 1$$

и получим новую игру G'; $\mathrm{Val}(G') = 2n\,\mathrm{Val}(G) - 1$.

- Если $\mathrm{Val}(G) > 0$, то $\mathrm{Val}(G') \geqslant 2n/n - 1 = 1$.
- Если $\mathrm{Val}\,G \leqslant 0$, то $\mathrm{Val}(G') \leqslant -1$.

Добавление малого затухания платежей

G'' — игра с затухающим платежом, в которой все данные точно такие же, как в циклической игре G'.

Основное свойство

Если λ достаточно близок к 1, то $\mathrm{val}(G) > 0$ тогда и только тогда, когда игры $\mathrm{val}(G'') > 0$.

Цена игры G' положительная: спецпартия игры G''

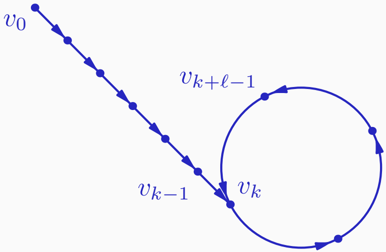
- Макс придерживается в игре G'' оптимальной позиционной стратегии для игры G';
- Мин придерживается оптимальной позиционной стратегии в игре G''.

A — сумма весов первых k рёбер.
P — сумма положительных весов цикла.
$-N$ — сумма неположительных весов цикла.

Цена игры G' положительная: спецпартия игры G''

- Макс придерживается в игре G'' оптимальной позиционной стратегии для игры G';
- Мин придерживается оптимальной позиционной стратегии в игре G''.

Выходит на предельный цикл.



A — сумма весов первых k рёбер.

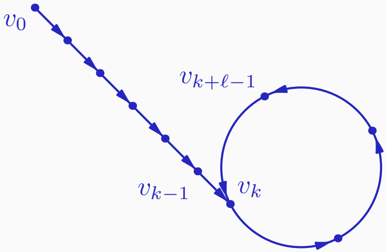
P — сумма положительных весов цикла.

$-N$ — сумма неположительных весов цикла.

Цена игры G' положительная: спецпартия игры G''

- Макс придерживается в игре G'' оптимальной позиционной стратегии для игры G';
- Мин придерживается оптимальной позиционной стратегии в игре G''.

Выходит на предельный цикл.



A — сумма весов первых k рёбер.
P — сумма положительных весов цикла.
$-N$ — сумма неположительных весов цикла.

Положительность вклада каждого прохождения цикла

1. Вклад каждого положительного ребра (u_+, v_+) цикла не меньше $\lambda^\ell w'(u_+, v_+)$.
2. Вклад каждого неположительного ребра (u_-, v_-) цикла не меньше $w'(u_-, v_-)$.
3. Вес цикла с учётом затухания не меньше $\lambda^\ell P - N = (P - N) - (1 - \lambda^\ell)P$, то есть, не меньше обычного веса, уменьшенного на $(1 - \lambda^\ell)P$.
4. Так как $P \leqslant 2n\ell W$, при

$$(1 - \lambda^\ell)2n\ell W < \frac{1}{2} \qquad (*)$$

вес предельного цикла не меньше $1/2$ (потому что $P - N \geqslant 1$), вклад $(i+1)$-го прохождения цикла в результат партии игры G'' не меньше $\lambda^{i\ell}/2$.

Положительность вклада каждого прохождения цикла

1. Вклад каждого положительного ребра (u_+, v_+) цикла не меньше $\lambda^\ell w'(u_+, v_+)$.
2. Вклад каждого неположительного ребра (u_-, v_-) цикла не меньше $w'(u_-, v_-)$.
3. Вес цикла с учётом затухания не меньше $\lambda^\ell P - N = (P - N) - (1 - \lambda^\ell)P$, то есть, не меньше обычного веса, уменьшенного на $(1 - \lambda^\ell)P$.
4. Так как $P \leqslant 2n\ell W$, при
$$(1 - \lambda^\ell)2n\ell W < \frac{1}{2} \qquad (*)$$
вес предельного цикла не меньше $1/2$ (потому что $P - N \geqslant 1$), вклад $(i+1)$-го прохождения цикла в результат партии игры G'' не меньше $\lambda^{i\ell}/2$.

Положительность вклада каждого прохождения цикла

1. Вклад каждого положительного ребра (u_+, v_+) цикла не меньше $\lambda^\ell w'(u_+, v_+)$.
2. Вклад каждого неположительного ребра (u_-, v_-) цикла не меньше $w'(u_-, v_-)$.
3. Вес цикла с учётом затухания не меньше $\lambda^\ell P - N = (P - N) - (1 - \lambda^\ell)P$, то есть, не меньше обычного веса, уменьшенного на $(1 - \lambda^\ell)P$.
4. Так как $P \leqslant 2n\ell W$, при
$$(1 - \lambda^\ell)2n\ell W < \frac{1}{2} \qquad (*)$$
вес предельного цикла не меньше $1/2$ (потому что $P - N \geqslant 1$), вклад $(i+1)$-го прохождения цикла в результат партии игры G'' не меньше $\lambda^{i\ell}/2$.

Положительность вклада каждого прохождения цикла

1. Вклад каждого положительного ребра (u_+, v_+) цикла не меньше $\lambda^\ell w'(u_+, v_+)$.
2. Вклад каждого неположительного ребра (u_-, v_-) цикла не меньше $w'(u_-, v_-)$.
3. Вес цикла с учётом затухания не меньше $\lambda^\ell P - N = (P - N) - (1 - \lambda^\ell)P$, то есть, не меньше обычного веса, уменьшенного на $(1 - \lambda^\ell)P$.
4. Так как $P \leqslant 2n\ell W$, при
$$(1 - \lambda^\ell)2n\ell W < \frac{1}{2} \qquad (*)$$
вес предельного цикла не меньше $1/2$ (потому что $P - N \geqslant 1$), вклад $(i+1)$-го прохождения цикла в результат партии игры G'' не меньше $\lambda^{i\ell}/2$.

Учёт весов рёбер до вхождения в предельный цикл

Таких рёбер k, значит, $|A| \leqslant nk(2W+1)$.

При

$$\frac{1}{2} \cdot \lambda^{4nk(2W+1)\ell} > \frac{1}{4} \qquad (**)$$

результат спецпартии игры G'' положительный: прохождения первых $4nk(2W+1)$ циклов дадут положительный вклад больше $nk(2W+1)$, что компенсирует возможный отрицательный вклад A.

Учёт весов рёбер до вхождения в предельный цикл

Таких рёбер k, значит, $|A| \leqslant nk(2W+1)$.

При

$$\frac{1}{2} \cdot \lambda^{4nk(2W+1)\ell} > \frac{1}{4} \qquad (**)$$

результат спецпартии игры G'' положительный: прохождения первых $4nk(2W+1)$ циклов дадут положительный вклад больше $nk(2W+1)$, что компенсирует возможный отрицательный вклад A.

Выбор параметра затухания $\lambda = 1 - \varepsilon$

Неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

1. Если $\varepsilon < \dfrac{1}{4n\ell^2 W}$, то $(1-\lambda^\ell)2n\ell W < \dfrac{1}{2}, \quad (*)$.
2. Если $\varepsilon < \dfrac{1}{8nk\ell(2W+1)}$, то $\dfrac{1}{2} \cdot \lambda^{4nk(2W+1)\ell} > \dfrac{1}{4}, \quad (**)$.

Вывод:

Так как $k \leqslant n$, $\ell \leqslant n$, при $\varepsilon < \left(8n^3(2W+1)\right)^{-1}$ выполняются и $(*)$, и $(**)$.

Цена спецпартии положительная. Но Мин старался изо всех сил, так что и цена игры G'' положительная.

Выбор параметра затухания $\lambda = 1 - \varepsilon$

Неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

1. Если $\varepsilon < \dfrac{1}{4n\ell^2 W}$, то $(1-\lambda^\ell)2n\ell W < \dfrac{1}{2}, \quad (*)$.
2. Если $\varepsilon < \dfrac{1}{8nk\ell(2W+1)}$, то $\dfrac{1}{2} \cdot \lambda^{4nk(2W+1)\ell} > \dfrac{1}{4}, \quad (**)$.

Вывод:

Так как $k \leqslant n$, $\ell \leqslant n$, при $\varepsilon < \left(8n^3(2W+1)\right)^{-1}$ выполняются и $(*)$, и $(**)$.

Цена спецпартии положительная. Но Мин старался изо всех сил, так что и цена игры G'' положительная.

Выбор параметра затухания $\lambda = 1 - \varepsilon$

Неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

1. Если $\varepsilon < \dfrac{1}{4n\ell^2 W}$, то $(1-\lambda^\ell)2n\ell W < \dfrac{1}{2}, \quad (*)$.
2. Если $\varepsilon < \dfrac{1}{8nk\ell(2W+1)}$, то $\dfrac{1}{2} \cdot \lambda^{4nk(2W+1)\ell} > \dfrac{1}{4}, \quad (**)$.

Вывод:

Так как $k \leqslant n$, $\ell \leqslant n$, при $\varepsilon < \left(8n^3(2W+1)\right)^{-1}$ выполняются и $(*)$, и $(**)$.

Цена спецпартии положительная. Но Мин старался изо всех сил, так что и цена игры G'' положительная.

Цена игры G' отрицательная

Всё аналогично.

Спецпартия игры G'':

- Макс придерживается оптимальной позиционной стратегии в игре G'';
- Мин придерживается в игре G'' оптимальной позиционной стратегии для игры G'.

Аналогичные оценки доказывают

Утверждение

При $\varepsilon < \left(8n^3(2W+1)\right)^{-1}$ цена спецпартии отрицательная и цена игры G'' отрицательная.

Цена игры G' отрицательная

Всё аналогично.

Спецпартия игры G'':

- Макс придерживается оптимальной позиционной стратегии в игре G'';
- Мин придерживается в игре G'' оптимальной позиционной стратегии для игры G'.

Аналогичные оценки доказывают

Утверждение

При $\varepsilon < \left(8n^3(2W+1)\right)^{-1}$ цена спецпартии отрицательная и цена игры G'' отрицательная.

Цена игры G' отрицательная

Всё аналогично.

Спецпартия игры G'':

- Макс придерживается оптимальной позиционной стратегии в игре G'';
- Мин придерживается в игре G'' оптимальной позиционной стратегии для игры G'.

Аналогичные оценки доказывают

Утверждение

При $\varepsilon < \left(8n^3(2W+1)\right)^{-1}$ цена спецпартии отрицательная и цена игры G'' отрицательная.

Искомая сводимость построена

Отображение $G \mapsto G''$ $\left(\lambda = 1 - \left(8n^3(2W+1)\right)^{-1}\right)$ сводит MPG к DPG:

- Если $\mathrm{val}(G) > 0$, то $\mathrm{val}(G'') > 0$.
- Если $\mathrm{val}(G) \leqslant 0$, то $\mathrm{val}(G'') < 0$.

Все вычисления выполняются за время полиномиальное от длины входа и длины выхода.

Длина записи λ не больше $O(\log \varepsilon^{-1}) = O(\log n + \log W) = \mathrm{poly}(\mathrm{size}(\langle G \rangle))$.

Искомая сводимость построена

Отображение $G \mapsto G''$ $\left(\lambda = 1 - \left(8n^3(2W+1)\right)^{-1}\right)$ сводит MPG к DPG:

- Если $\mathrm{val}(G) > 0$, то $\mathrm{val}(G'') > 0$.
- Если $\mathrm{val}(G) \leqslant 0$, то $\mathrm{val}(G'') < 0$.

Все вычисления выполняются за время полиномиальное от длины входа и длины выхода.

Длина записи λ не больше $O(\log \varepsilon^{-1}) = O(\log n + \log W) = \mathrm{poly}(\mathrm{size}(\langle G \rangle))$.

Искомая сводимость построена

Отображение $G \mapsto G''$ $(\lambda = 1 - \left(8n^3(2W+1)\right)^{-1})$ сводит MPG к DPG:

- Если $\mathrm{val}(G) > 0$, то $\mathrm{val}(G'') > 0$.
- Если $\mathrm{val}(G) \leqslant 0$, то $\mathrm{val}(G'') < 0$.

Все вычисления выполняются за время полиномиальное от длины входа и длины выхода.

Длина записи λ не больше $O(\log \varepsilon^{-1}) = O(\log n + \log W) = \mathrm{poly}(\mathrm{size}(\langle G \rangle))$.

Принадлежность классу $\mathbf{NP} \cap \mathbf{co\text{-}NP}$

Решение PG, MPG и DPG не слишком трудно

Теорема

DPG $\in \mathrm{NP} \cap$ co-NP.

(Класс co-NP составляют дополнения к языкам из NP.)

Теорема и сводимости

$$\mathrm{PG} \le_p \mathrm{MPG} \le_p \mathrm{DPG}$$

дают следствия:

Следствие 1

MPG $\in \mathrm{NP} \cap$ co-NP.

Следствие 2

PG $\in \mathrm{NP} \cap$ co-NP.

Решение PG, MPG и DPG не слишком трудно

Теорема

$\mathsf{DPG} \in \mathrm{NP} \cap \mathsf{co}\text{-}\mathrm{NP}$.

(Класс $\mathsf{co}\text{-}\mathrm{NP}$ составляют дополнения к языкам из NP.)

Теорема и сводимости

$$\mathsf{PG} \leq_p \mathsf{MPG} \leq_p \mathsf{DPG}$$

дают следствия:

Следствие 1

$\mathsf{MPG} \in \mathrm{NP} \cap \mathsf{co}\text{-}\mathrm{NP}$.

Следствие 2

$\mathsf{PG} \in \mathrm{NP} \cap \mathsf{co}\text{-}\mathrm{NP}$.

Решение PG, MPG и DPG не слишком трудно (окончание)

Упражнение

Если язык $L \in \mathrm{NP} \cap \text{co-}\mathrm{NP}$ является NP-полным, то $\mathrm{NP} = \text{co-}\mathrm{NP}$.

Одна из многочисленных гипотез теории сложности состоит в том, что $\mathrm{NP} \neq \text{co-}\mathrm{NP}$. Следствия из равенства этих классов не слишком правдоподобные: например, для любой булевой тавтологии должно существовать достаточно короткое «доказательство» (в расширенном смысле).

Решение PG, MPG и DPG не слишком трудно (окончание)

Упражнение

Если язык $L \in \mathrm{NP} \cap \text{co-}\mathrm{NP}$ является NP-полным, то $\mathrm{NP} = \text{co-}\mathrm{NP}$.

Одна из многочисленных гипотез теории сложности состоит в том, что $\mathrm{NP} \neq \text{co-}\mathrm{NP}$. Следствия из равенства этих классов не слишком правдоподобные: например, для любой булевой тавтологии должно существовать достаточно короткое «доказательство» (в расширенном смысле).

Доказательство теоремы

Цены игр с затухающим платежом на одном и том же графе с разными начальными позициями i удовлетворяют системе уравнений:

$$\mathrm{val}_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} (\lambda \,\mathrm{val}_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} (\lambda \,\mathrm{val}_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

Более того, аргмаксимумы и аргминимумы в этих равенствах задают оптимальные стратегии игроков.

Если указаны значения val_i, за полиномиальное время можно проверить выполнение этих равенств. Неподвижная точка у отображения пересчёта цен единственная, так что это и будут цены.

Доказательство теоремы

Цены игр с затухающим платежом на одном и том же графе с разными начальными позициями i удовлетворяют системе уравнений:

$$\mathrm{val}_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} (\lambda \,\mathrm{val}_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} (\lambda \,\mathrm{val}_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

Более того, аргмаксимумы и аргминимумы в этих равенствах задают оптимальные стратегии игроков.

Если указаны значения val_i, за полиномиальное время можно проверить выполнение этих равенств. Неподвижная точка у отображения пересчёта цен единственная, так что это и будут цены.

Доказательство теоремы (завершение)

Сертификат и для DPG, и для $\overline{\text{DPG}}$: набор val_i, удовлетворяющий уравнениям неподвижной точки.

По такому набору легко проверяется выполнение уравнений неподвижной точки и положительность (или неположительность) цены.

Нужно оценить размер сертификата. Но это уже сделано раньше: знаменатели цен игры ограничены $(pq)^3$, числители — $W(pq)^3$.

Общая длина записи сертификата: $O(n\log(pqW)) = \mathrm{poly}(\mathrm{size}(\langle G\rangle))$.

Доказательство теоремы (завершение)

Сертификат и для DPG, и для $\overline{\text{DPG}}$: набор val_i, удовлетворяющий уравнениям неподвижной точки.

По такому набору легко проверяется выполнение уравнений неподвижной точки и положительность (или неположительность) цены.

Нужно оценить размер сертификата. Но это уже сделано раньше: знаменатели цен игры ограничены $(pq)^3$, числители — $W(pq)^3$.

Общая длина записи сертификата: $O(n\log(pqW)) = \mathrm{poly}(\mathrm{size}(\langle G\rangle))$.

Доказательство теоремы (завершение)

Сертификат и для DPG, и для $\overline{\text{DPG}}$: набор val_i, удовлетворяющий уравнениям неподвижной точки.

По такому набору легко проверяется выполнение уравнений неподвижной точки и положительность (или неположительность) цены.

Нужно оценить размер сертификата. Но это уже сделано раньше: знаменатели цен игры ограничены $(pq)^3$, числители — $W(pq)^3$.

Общая длина записи сертификата: $O(n \log(pqW)) = \mathrm{poly}(\mathrm{size}(\langle G \rangle))$.

Псевдополиномиальные алгоритмы

Что такое псевдополиномиальные алгоритмы

Числовые данные предполагаются заданными в унарной системе. Алгоритм, который работает за время, полиномиальное от такого входа, называется **псевдополиномиальным**.

Для решения MPG и DPG: псевдополиномиальный алгоритм работает за время $\mathrm{poly}(n, W, p, q)$ (W — максимум модуля весов, для DPG коэффициент затухания представляется несократимой дробью p/q.)

Что такое псевдополиномиальные алгоритмы

Числовые данные предполагаются заданными в унарной системе. Алгоритм, который работает за время, полиномиальное от такого входа, называется псевдополиномиальным.

Для решения MPG и DPG: псевдополиномиальный алгоритм работает за время $\mathrm{poly}(n, W, p, q)$ (W — максимум модуля весов, для DPG коэффициент затухания представляется несократимой дробью p/q.)

Псевдополиномиальный алгоритм решения MPG

Цены игры за конечное время T вычисляются по рекурренте

$$
\begin{gathered}
\mathrm{val}(v, T) = 0; \\
\mathrm{val}(u, t) = \min_{v:(u,v)\in E} \big(w(u, v) + \mathrm{val}(v, t + 1)\big), \\
\text{если } u \in V_0,\ 0 \leqslant t < T; \\
\mathrm{val}(u, t) = \max_{v:(u,v)\in E} \big(w(u, v) + \mathrm{val}(v, t + 1)\big), \\
\text{если } u \in V_1,\ 0 \leqslant t < T.
\end{gathered}
$$

Это возможно за время $\mathrm{poly}(n, T, \log W)$.

Связь между ценой и ценой за конечное время

Утверждение

$T\,\mathrm{val} - 2nW \leqslant \mathrm{val}_T \leqslant T\,\mathrm{val} + 2nW$.

Доказательство

Связь между ценой и ценой за конечное время

Утверждение

$T \operatorname{val} - 2nW \leqslant \operatorname{val}_T \leqslant T \operatorname{val} + 2nW$.

Доказательство

Пусть в игре на T ходов Мин следует оптимальной позиционной стратегии в бесконечной циклической игре.

Партия из T ходов задаёт маршрут по графу.

Этот маршрут разбивается на простые циклы и не более чем n рёбер, не входящих в простые циклы.

Вклад каждого простого цикла не больше val, а вклад каждого из остальных рёбер не больше W. Отсюда получаем оценку $\operatorname{val}_T \leqslant (T - n) \operatorname{val} + nW \leqslant T \operatorname{val} + 2nW$, так как цена игры по модулю не превосходит W.

Связь между ценой и ценой за конечное время

Утверждение

$T\,\mathrm{val} - 2nW \leqslant \mathrm{val}_T \leqslant T\,\mathrm{val} + 2nW$.

Доказательство

Второе неравенство аналогично. Пусть теперь в игре на T ходов Макс следует оптимальной позиционной стратегии в бесконечной циклической игре.

Вклад каждого простого цикла по крайней мере val, а вклад каждого из остальных $\leqslant n$ рёбер не меньше $-W$. Отсюда получаем оценку $\mathrm{val}_T \geqslant (T - n)\,\mathrm{val} - nW \geqslant T\,\mathrm{val} - 2nW$.

Оценка числа итераций

Цена игры — это средний вес цикла, то есть рациональное число со знаменателем не больше n. Поэтому $T > 4n^3W$ из решения циклической игры за T ходов, для которого выполняется неравенство

$$\left|\mathrm{val} - \frac{\mathrm{val}_T}{T}\right| \leqslant \frac{2nW}{T} < \frac{2}{n^2},$$

цена игры восстанавливается точно.

Получили псевдополиномиальный алгоритм решения циклических игр.

Оценка числа итераций

Цена игры — это средний вес цикла, то есть рациональное число со знаменателем не больше n. Поэтому $T > 4n^3 W$ из решения циклической игры за T ходов, для которого выполняется неравенство

$$\left|\mathrm{val} - \frac{\mathrm{val}_T}{T}\right| \leqslant \frac{2nW}{T} < \frac{2}{n^2},$$

цена игры восстанавливается точно.

Получили псевдополиномиальный алгоритм решения циклических игр.

Псевдополиномиальный алгоритм для решения DPG

Также основан на итерациях отображения пересчёта цен

$$f(x)_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

Было доказано, что f сжимающее относительно ℓ_∞, коэффициент сжатия $\leqslant \lambda$.

Единственной неподвижной точкой f является val: вектор цен игр, начинающихся в разных позициях графа игры.

Псевдополиномиальный алгоритм для решения DPG

Также основан на итерациях отображения пересчёта цен

$$f(x)_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

Было доказано, что f сжимающее относительно ℓ_∞, коэффициент сжатия $\leqslant \lambda$.

Единственной неподвижной точкой f является val: вектор цен игр, начинающихся в разных позициях графа игры.

Псевдополиномиальный алгоритм для решения DPG

Также основан на итерациях отображения пересчёта цен

$$f(x)_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E}(\lambda x_j + (1-\lambda)w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E}(\lambda x_j + (1-\lambda)w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

Было доказано, что f сжимающее относительно ℓ_∞, коэффициент сжатия $\leqslant \lambda$.

Единственной неподвижной точкой f является val: вектор цен игр, начинающихся в разных позициях графа игры.

Итерации, начиная с нулевого вектора: $x^{(t)} = f^{(t)}(0)$.

$$\| \mathrm{val} - x^{(t)} \|_\infty = \| f^{(t)}(\mathrm{val}) - f^{(t)}(0) \|_\infty < \lambda^t \| \mathrm{val} - 0 \| \leqslant \lambda^t W$$

(цена игры по модулю не больше W).

Чтобы точно восстановить цены, нужно их приближённое значение с точностью $\varepsilon \approx (pq)^{-6n}/2$.

То есть требуемая точность достигается после $t = O(p(6n \log(pq) + \log W))$ итераций. Это количество псевдополиномиально зависит от размера входных данных.

Оценка скорости сходимости

Итерации, начиная с нулевого вектора: $x^{(t)} = f^{(t)}(0)$.

$$\|\operatorname{val} - x^{(t)}\|_\infty = \|f^{(t)}(\operatorname{val}) - f^{(t)}(0)\|_\infty < \lambda^t \|\operatorname{val} - 0\| \leqslant \lambda^t W$$

(цена игры по модулю не больше W).

Чтобы точно восстановить цены, нужно их приближённое значение с точностью $\varepsilon \approx (pq)^{-6n}/2$.

То есть требуемая точность достигается после $t = O(p(6n\log(pq) + \log W))$ итераций. Это количество псевдополиномиально зависит от размера входных данных.

Оценка скорости сходимости

Итерации, начиная с нулевого вектора: $x^{(t)} = f^{(t)}(0)$.

$$\|\,\mathrm{val} - x^{(t)}\|_\infty = \|f^{(t)}(\mathrm{val}) - f^{(t)}(0)\|_\infty < \lambda^t \|\,\mathrm{val} - 0\| \leqslant \lambda^t W$$

(цена игры по модулю не больше W).

Чтобы точно восстановить цены, нужно их приближённое значение с точностью $\varepsilon \approx (pq)^{-6n}/2$.

То есть требуемая точность достигается после $t = O(p(6n\log(pq) + \log W))$ итераций. Это количество псевдополиномиально зависит от размера входных данных.

Нюанс с арифметикой

Мы оценили количество итераций. Но время выполнения одной итерации растёт, так как числители и знаменатели дробей, задающих координаты, растут.

Формулы линейные, всё хорошо.

Нюанс с арифметикой

Мы оценили количество итераций. Но время выполнения одной итерации растёт, так как числители и знаменатели дробей, задающих координаты, растут.

Формулы линейные, всё хорошо.

Оценки длины записи чисел в вычислениях

L_t — максимальная длина записи координаты вектора $x^{(t)}$.

Из формул пересчёта цен

$$f(x)_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

получаем верхнюю оценку на длину записи знаменателя: q^t.

Все цены в играх за конечное время по абсолютной величине не превосходят W (формулы пересчёта цен показывают, что следующая цена является выпуклой комбинацией какой-то из предыдущих цен и веса ребра).

Значит, числитель по абсолютной величине не больше Wq^t. Поэтому $L_t \leqslant 2t \log q + \log W$.

Оценки длины записи чисел в вычислениях

L_t — максимальная длина записи координаты вектора $x^{(t)}$.

Из формул пересчёта цен

$$f(x)_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda)w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda)w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

получаем верхнюю оценку на длину записи знаменателя: q^t.

Все цены в играх за конечное время по абсолютной величине не превосходят W (формулы пересчёта цен показывают, что следующая цена является выпуклой комбинацией какой-то из предыдущих цен и веса ребра).

Значит, числитель по абсолютной величине не больше Wq^t. Поэтому $L_t \leqslant 2t \log q + \log W$.

Оценки длины записи чисел в вычислениях

L_t — максимальная длина записи координаты вектора $x^{(t)}$.

Из формул пересчёта цен

$$f(x)_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda)w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda)w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

получаем верхнюю оценку на длину записи знаменателя: q^t.

Все цены в играх за конечное время по абсолютной величине не превосходят W (формулы пересчёта цен показывают, что следующая цена является выпуклой комбинацией какой-то из предыдущих цен и веса ребра).

Значит, числитель по абсолютной величине не больше Wq^t. Поэтому $L_t \leqslant 2t \log q + \log W$.

Оценки длины записи чисел в вычислениях

L_t — максимальная длина записи координаты вектора $x^{(t)}$.

Из формул пересчёта цен

$$f(x)_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

получаем верхнюю оценку на длину записи знаменателя: q^t.

Все цены в играх за конечное время по абсолютной величине не превосходят W (формулы пересчёта цен показывают, что следующая цена является выпуклой комбинацией какой-то из предыдущих цен и веса ребра).

Значит, числитель по абсолютной величине не больше Wq^t. Поэтому $L_t \leqslant 2t \log q + \log W$.

Итоговая оценка времени работы

1. Нужно выполнить $t = 6q(\log(pq) + \log W)$ итераций.
2. На каждой итерации сделать $\mathrm{poly}(n)$ арифметических операций с числами, длина записи которых $O\big(q\log(pqW)\big)$.
3. Потом нужно восстановить цену игры точно, это требует времени $\mathrm{poly}\left(q\log(pqW)\right)$.
4. Всего операций $\mathrm{poly}\left(n, q, \log(pqW)\right)$.

Следствие

DPG на n-вершинном графе с параметром затухания $1 - 1/n$ может быть решена за полиномиальное время.

Итоговая оценка времени работы

1. Нужно выполнить $t = 6q(\log(pq) + \log W)$ итераций.
2. На каждой итерации сделать $\mathrm{poly}(n)$ арифметических операций с числами, длина записи которых $O\big(q\log(pqW)\big)$.
3. Потом нужно восстановить цену игры точно, это требует времени $\mathrm{poly}\,\big(q\log(pqW)\big)$.
4. Всего операций $\mathrm{poly}\,\big(n, q, \log(pqW)\big)$.

Следствие

DPG на n-вершинном графе с параметром затухания $1 - 1/n$ может быть решена за полиномиальное время.

Итоговая оценка времени работы

1. Нужно выполнить $t = 6q(\log(pq) + \log W)$ итераций.
2. На каждой итерации сделать $\mathrm{poly}(n)$ арифметических операций с числами, длина записи которых $O\big(q\log(pqW)\big)$.
3. Потом нужно восстановить цену игры точно, это требует времени $\mathrm{poly}\left(q\log(pqW)\right)$.
4. Всего операций $\mathrm{poly}\left(n, q, \log(pqW)\right)$.

Следствие

DPG на n-вершинном графе с параметром затухания $1 - 1/n$ может быть решена за полиномиальное время.

Итоговая оценка времени работы

1. Нужно выполнить $t = 6q(\log(pq) + \log W)$ итераций.
2. На каждой итерации сделать $\mathrm{poly}(n)$ арифметических операций с числами, длина записи которых $O\big(q\log(pqW)\big)$.
3. Потом нужно восстановить цену игры точно, это требует времени $\mathrm{poly}\,\big(q\log(pqW)\big)$.
4. Всего операций $\mathrm{poly}\,\big(n, q, \log(pqW)\big)$.

Следствие

DPG на n-вершинном графе с параметром затухания $1 - 1/n$ может быть решена за полиномиальное время.

Итоговая оценка времени работы

1. Нужно выполнить $t = 6q(\log(pq) + \log W)$ итераций.
2. На каждой итерации сделать $\mathrm{poly}(n)$ арифметических операций с числами, длина записи которых $O\big(q \log(pqW)\big)$.
3. Потом нужно восстановить цену игры точно, это требует времени $\mathrm{poly}\,\big(q \log(pqW)\big)$.
4. Всего операций $\mathrm{poly}\,\big(n, q, \log(pqW)\big)$.

Следствие

DPG на n-вершинном графе с параметром затухания $1 - 1/n$ может быть решена за полиномиальное время.