с/к “Эффективные алгоритмы”

Лекция 19: Потоки в сетях с несколькими веществами

А. Куликов

Computer Science клуб при ПОМИ
http://logic.pdmi.ras.ru/~infclub/

План лекции

1. Постановка задачи

План лекции

1. Постановка задачи

2. Алгоритм

План лекции

1. Постановка задачи
2. Алгоритм
3. Анализ алгоритма
    - Оценки Чернова
    - Оценка оптимальности

План лекции

1. Постановка задачи
2. Алгоритм
3. Анализ алгоритма
   - Оценки Чернова
   - Оценка оптимальности

Постановка задачи

Определение

Постановка задачи

Определение

- Дан ориентированный граф $G = (V, E)$ без весов на рёбрах и k пар истоков-стоков $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k) \in V^2$.

Постановка задачи

Определение

- Дан ориентированный граф $G = (V, E)$ без весов на рёбрах и k пар истоков-стоков $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k) \in V^2$.
- Задача о потоке в сети с несколькими веществами (multicommodity flow problem) заключается в нахождении такого множества путей P_i из s_i в t_i для всех $i = 1, \ldots, k$, при котором максимальная ширина (congestion) рёбер была бы минимальна, где под шириной понимается количество путей, проходящих через это ребро:
$$c(e) = |\{P_i \mid e \in P_i\}|.$$

Постановка задачи

Определение

- Дан ориентированный граф $G = (V, E)$ без весов на рёбрах и k пар истоков-стоков $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k) \in V^2$.
- Задача о потоке в сети с несколькими веществами (multicommodity flow problem) заключается в нахождении такого множества путей P_i из s_i в t_i для всех $i = 1, \ldots, k$, при котором максимальная ширина (congestion) рёбер была бы минимальна, где под шириной понимается количество путей, проходящих через это ребро:

$$c(e) = |\{P_i \mid e \in P_i\}|.$$

Факт

Задача является NP-трудной.

План лекции

1. Постановка задачи

2. Алгоритм

3. Анализ алгоритма
   - Оценки Чернова
   - Оценка оптимальности

Формулировка в виде задачи линейного программирования

Формулировка в виде задачи линейного программирования

Минимизировать W_{LP} при следующих ограничениях:

Формулировка в виде задачи линейного программирования

Формулировка в виде задачи линейного программирования

Минимизировать W_{LP} при следующих ограничениях:

1. Переменные $x_i(u, v)$ определяют поток: $\forall v \in V, \forall i = 1, \ldots, k,$

$$\sum_{w\colon (v,w)\in E} x_i(v,w) - \sum_{u\colon (u,v)\in E} x_i(u,v) = \begin{cases} 1, & v = s_i, \\ -1, & v = t_i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Формулировка в виде задачи линейного программирования

Формулировка в виде задачи линейного программирования

Минимизировать W_{LP} при следующих ограничениях:

1. Переменные $x_i(u, v)$ определяют поток: $\forall v \in V, \forall i = 1, \ldots, k$,

$$\sum_{w\colon (v,w)\in E} x_i(v, w) - \sum_{u\colon (u,v)\in E} x_i(u, v) = \begin{cases} 1, & v = s_i, \\ -1, & v = t_i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2. Ширина каждого ребра ограничена числом W_{LP}: $\forall (u, v) \in E, \sum_{1 \le i \le k} x_i(u, v) \le W_{LP}$.

Формулировка в виде задачи линейного программирования

Формулировка в виде задачи линейного программирования

Минимизировать W_{LP} при следующих ограничениях:

1. Переменные $x_i(u,v)$ определяют поток: $\forall v \in V, \forall i = 1, \dots, k,$
$$\sum_{w\colon (v,w)\in E} x_i(v,w) - \sum_{u\colon (u,v)\in E} x_i(u,v) = \begin{cases} 1, & v = s_i, \\ -1, & v = t_i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$
2. Ширина каждого ребра ограничена числом W_{LP}:
$\forall (u,v) \in E, \sum_{1 \le i \le k} x_i(u,v) \le W_{LP}$.
3. Поток является $0-1$ потоком:
$\forall (u,v) \in E, \forall i = 1, \dots, k, x_i(u,v) \in \{0,1\}$.

Релаксация

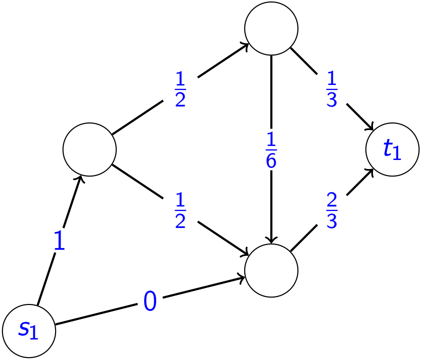
Релаксация

Заменим теперь условие $x_i(u, v) \in \{0, 1\}$ на $x_i(u, v) \geq 0$ и решим полученную задачу. Полученный поток может не быть целочисленным.

Релаксация

Релаксация

Заменим теперь условие $x_i(u,v) \in \{0,1\}$ на $x_i(u,v) \geq 0$ и решим полученную задачу. Полученный поток может не быть целочисленным.



Переход к целочисленному потоку

Переход к целочисленному потоку

Переход к целочисленному потоку

Переход к целочисленному потоку

- Будем обрабатывать каждый из k потоков отдельно.

Переход к целочисленному потоку

Переход к целочисленному потоку

- Будем обрабатывать каждый из k потоков отдельно.
- Рассмотрим граф G_i, содержащий только рёбра, по которым идёт i-й поток.

Переход к целочисленному потоку

Переход к целочисленному потоку

- Будем обрабатывать каждый из k потоков отдельно.
- Рассмотрим граф G_i, содержащий только рёбра, по которым идёт i-й поток.
- Рассмотрим теперь путь P_{i1} в графе G_i из s_i в t_i и пусть

$$\alpha_{i1} = \min_{(v,w)\in P_1} x_i(v, w).$$

Переход к целочисленному потоку

Переход к целочисленному потоку

- Будем обрабатывать каждый из k потоков отдельно.
- Рассмотрим граф G_i, содержащий только рёбра, по которым идёт i-й поток.
- Рассмотрим теперь путь P_{i1} в графе G_i из s_i в t_i и пусть

$$\alpha_{i1} = \min_{(v,w)\in P_1} x_i(v,w).$$

- Вычтем α_{i1} из всех рёбер данного пути:

$$x'(v,w) = \begin{cases} x(v,w) - \alpha_{i1}, & (v,w) \in P_{i1}, \\ x(v,w), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

найдем новый путь и т.д.

Переход к целочисленному потоку

Переход к целочисленному потоку

- Будем обрабатывать каждый из k потоков отдельно.
- Рассмотрим граф G_i, содержащий только рёбра, по которым идёт i-й поток.
- Рассмотрим теперь путь P_{i1} в графе G_i из s_i в t_i и пусть

$$\alpha_{i1} = \min_{(v,w)\in P_1} x_i(v,w).$$

- Вычтем α_{i1} из всех рёбер данного пути:

$$x'(v,w) = \begin{cases} x(v,w) - \alpha_{i1}, & (v,w) \in P_{i1}, \\ x(v,w), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

  найдем новый путь и т.д.
- На каждом шаге хотя бы одно ребро удаляется из G_i.

Переход к целочисленному потоку

Переход к целочисленному потоку

Переход к целочисленному потоку

Переход к целочисленному потоку

- В итоге, поток i-го вещества разбивается на j_i путей $P_{i1}, \ldots, P_{ij_i}$ из s_i в t_i, где вдоль пути P_{ij} идёт α_{ij} вещества, так что

$$\forall (u,v) \in E, \forall i = 1, \ldots, k, \sum_{j:(u,v)\in P_{ij}} \alpha_{ij} = x_i(u,v),$$

$$\forall i = 1, \ldots, k, \sum_{j=1}^{j_i} \alpha_{ij} = 1.$$

Переход к целочисленному потоку

Переход к целочисленному потоку

- В итоге, поток i-го вещества разбивается на j_i путей $P_{i1}, \ldots, P_{ij_i}$ из s_i в t_i, где вдоль пути P_{ij} идёт α_{ij} вещества, так что

$$\forall (u,v) \in E, \forall i = 1, \ldots, k, \sum_{j:(u,v)\in P_{ij}} \alpha_{ij} = x_i(u,v),$$

$$\forall i = 1, \ldots, k, \sum_{j=1}^{j_i} \alpha_{ij} = 1.$$

- В качестве пути P_i из s_i в t_i алгоритм выбирает путь P_{ij} с вероятностью α_{ij}.

Общая схема алгоритма

Общая схема алгоритма

Общая схема алгоритма

Общая схема алгоритма

- Решить релаксированную задачу линейного программирования, получив минимальную ширину W_{LP}.

Общая схема алгоритма

Общая схема алгоритма

- Решить релаксированную задачу линейного программирования, получив минимальную ширину W_{LP}.
- Разбить полученные потоки на пути P_{ij} для $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, j_i$ (где P_{ij} — путь из s_i в t_i), поток по каждому из которых равен $\alpha_{ij} > 0$, так что $\sum_j \alpha_{ij} = 1$ и

$$\sum_i \sum_{j:\ (v,w) \in P_{i,j}} \leq W_{LP}.$$

Общая схема алгоритма

Общая схема алгоритма

- Решить релаксированную задачу линейного программирования, получив минимальную ширину W_{LP}.
- Разбить полученные потоки на пути P_{ij} для $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, j_i$ (где P_{ij} — путь из s_i в t_i), поток по каждому из которых равен $\alpha_{ij} > 0$, так что $\sum_j \alpha_{ij} = 1$ и

$$\sum_i \sum_{j\colon (v,w) \in P_{i,j}} \leq W_{LP}.$$

- Для каждого i подбросить монетку с j_i гранями, где j-ая грань выпадает с вероятностью α_{ij}, и при выпадении грани f выбрать в качестве пути из s_i в t_i путь P_{if}.

План лекции

1 Постановка задачи

2 Алгоритм

3 Анализ алгоритма
- Оценки Чернова
- Оценка оптимальности

План лекции

1. Постановка задачи
2. Алгоритм
3. Анализ алгоритма
   - Оценки Чернова
   - Оценка оптимальности

Оценки Чернова

Теорема

Пусть X_i суть независимые случайные переменные, принимаюащие значение 1 с вероятностью p_i и значение 0 с вероятностью $(1 - p_i)$. Тогда для всех $\alpha > 0$ и $t > 0$

$$\mathbf{Prob}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i > t\right) \leq e^{-\alpha t} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{E}\left(e^{\alpha X_i}\right) = e^{-\alpha t} \prod_{i=1}^{k} \left(p_i e^{\alpha} + (1 - p_i)\right).$$

Оценки Чернова

Теорема

Пусть X_i суть независимые случайные переменные, принимаюащие значение 1 с вероятностью p_i и значение 0 с вероятностью $(1 - p_i)$. Тогда для всех $\alpha > 0$ и $t > 0$

$$\mathbf{Prob}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i > t\right) \leq e^{-\alpha t} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{E}\left(e^{\alpha X_i}\right) = e^{-\alpha t} \prod_{i=1}^{k} \left(p_i e^{\alpha} + (1 - p_i)\right).$$

Доказательство

$$\mathbf{Prob}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i > t\right) = \mathbf{Prob}\left(e^{\alpha \sum_{i=1}^{k} X_i} > e^{\alpha t}\right).$$

Доказательство (завершение)

Доказательство

Неравенство Маркова: для любой неотрицательной случайной величины Y

$$\mathbf{Prob}\,(Y > a) \leq \frac{\mathbf{E}\,(Y)}{a}.$$

Доказательство (завершение)

Доказательство

Неравенство Маркова: для любой неотрицательной случайной величины Y

$$\mathbf{Prob}\left(Y > a\right) \leq \frac{\mathbf{E}\left(Y\right)}{a}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{Prob}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i > t\right) \leq e^{-\alpha t}\mathbf{E}\left(e^{\alpha \sum_{i=1}^{k} X_i}\right) = e^{-\alpha t}\prod_{i=1}^{k}\mathbf{E}\left(e^{\alpha X_i}\right).$$

□

Следствие

Следствие

Пусть $M = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i$. Тогда для любого $\beta > 0$

$$\mathbf{Prob}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i > (1+\beta)M\right) \leq (1+\beta)^{-(1+\beta)M} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{E}\left((1+\beta)^{X_i}\right)$$

$$\leq \left(\frac{e^\beta}{(1+\beta)^{(1+\beta)}}\right)^M.$$

Следствие

Следствие

Пусть $M = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) = \sum_{i=1}^k p_i$. Тогда для любого $\beta > 0$

$$\mathbf{Prob}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i > (1+\beta)M\right) \le (1+\beta)^{-(1+\beta)M} \prod_{i=1}^k \mathbf{E}\left((1+\beta)^{X_i}\right)$$

$$\le \left(\frac{e^{\beta}}{(1+\beta)^{(1+\beta)}}\right)^M .$$

Доказательство

Следствие

Следствие

Пусть $M = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i$. Тогда для любого $\beta > 0$

$$\mathbf{Prob}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i > (1+\beta)M\right) \le (1+\beta)^{-(1+\beta)M} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{E}\left((1+\beta)^{X_i}\right) \le \left(\frac{e^{\beta}}{(1+\beta)^{(1+\beta)}}\right)^{M}.$$

Доказательство

- Первое неравенство следует из только что доказанной теоремы при $t = (1+\beta)M$, $\alpha = \ln(1+\beta)$.

Следствие

Следствие

Пусть $M = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i$. Тогда для любого $\beta > 0$

$$\mathbf{Prob}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i > (1+\beta)M\right) \le (1+\beta)^{-(1+\beta)M} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{E}\left((1+\beta)^{X_i}\right)$$
$$\le \left(\frac{e^{\beta}}{(1+\beta)^{(1+\beta)}}\right)^{M}.$$

Доказательство

- Первое неравенство следует из только что доказанной теоремы при $t = (1+\beta)M$, $\alpha = \ln(1+\beta)$.
- Второе — из следующего неравенства: $\mathbf{E}\left((1+\beta)^{X_i}\right) = p_i(1+\beta) + (1-p_i) = 1 + \beta p_i = 1 + \beta p_i \le e^{\beta p_i}$. $\square$

План лекции

1 Постановка задачи

2 Алгоритм

3 Анализ алгоритма
- Оценки Чернова
- Оценка оптимальности

Основная теорема

Теорема

Пусть дано $\epsilon > 0$. Если оптимальное решение задачи о потоке в сети с несколькими веществами удовлетворяет неравенству $W^* \le c_1(\epsilon)\ln n$, где $n = |V|$, то алгоритм находит решение, удовлетворяющее неравенству $W \le W^* + c_2(\epsilon)\sqrt{W^* \ln n}$, с вероятностью $1 - \epsilon$ (c_1, c_2 суть константы, зависящие от ϵ).

Основная теорема

Теорема

Пусть дано $\epsilon > 0$. Если оптимальное решение задачи о потоке в сети с несколькими веществами удовлетворяет неравенству $W^* \leq c_1(\epsilon) \ln n$, где $n = |V|$, то алгоритм находит решение, удовлетворяющее неравенству $W \leq W^* + c_2(\epsilon)\sqrt{W^* \ln n}$, с вероятностью $1 - \epsilon$ (c_1, c_2 суть константы, зависящие от ϵ).

Доказательство

Основная теорема

Теорема

Пусть дано $\epsilon > 0$. Если оптимальное решение задачи о потоке в сети с несколькими веществами удовлетворяет неравенству $W^* \le c_1(\epsilon)\ln n$, где $n = |V|$, то алгоритм находит решение, удовлетворяющее неравенству $W \le W^* + c_2(\epsilon)\sqrt{W^* \ln n}$, с вероятностью $1 - \epsilon$ (c_1, c_2 суть константы, зависящие от ϵ).

Доказательство

- Зафиксируем ребро $(v, w) \in E$.

Основная теорема

Теорема

Пусть дано $\epsilon > 0$. Если оптимальное решение задачи о потоке в сети с несколькими веществами удовлетворяет неравенству $W^* \le c_1(\epsilon)\ln n$, где $n = |V|$, то алгоритм находит решение, удовлетворяющее неравенству $W \le W^* + c_2(\epsilon)\sqrt{W^* \ln n}$, с вероятностью $1 - \epsilon$ (c_1, c_2 суть константы, зависящие от ϵ).

Доказательство

- Зафиксируем ребро $(v, w) \in E$.
- Ребро (v, w) используется i-м потоком с вероятностью $p_i = \sum_{j:\,(v,w)\in P_{ij}} \alpha_{ij}$.

Основная теорема

Теорема

Пусть дано $\epsilon > 0$. Если оптимальное решение задачи о потоке в сети с несколькими веществами удовлетворяет неравенству $W^* \le c_1(\epsilon) \ln n$, где $n = |V|$, то алгоритм находит решение, удовлетворяющее неравенству $W \le W^* + c_2(\epsilon)\sqrt{W^* \ln n}$, с вероятностью $1 - \epsilon$ (c_1, c_2 суть константы, зависящие от ϵ).

Доказательство

- Зафиксируем ребро $(v, w) \in E$.
- Ребро (v, w) используется i-м потоком с вероятностью $p_i = \sum_{j\colon (v,w) \in P_{ij}} \alpha_{ij}$.
- Пусть X_i — случайная $0/1$-переменная, принимающая значение 1 с веротяностью p_i.

Основная теорема

Теорема

Пусть дано $\epsilon > 0$. Если оптимальное решение задачи о потоке в сети с несколькими веществами удовлетворяет неравенству $W^* \leq c_1(\epsilon) \ln n$, где $n = |V|$, то алгоритм находит решение, удовлетворяющее неравенству $W \leq W^* + c_2(\epsilon)\sqrt{W^* \ln n}$, с вероятностью $1 - \epsilon$ (c_1, c_2 суть константы, зависящие от ϵ).

Доказательство

- Зафиксируем ребро $(v, w) \in E$.
- Ребро (v, w) используется i-м потоком с вероятностью $p_i = \sum_{j:\ (v,w) \in P_{ij}} \alpha_{ij}$.
- Пусть X_i — случайная $0/1$-переменная, принимающая значение 1 с веротяностью p_i.
- Тогда $W(v, w) = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

Доказательство (продолжение)

Доказательство

$$\mathbf{E}\left(W(v,w)\right) = \sum_i p_i = \sum_i \sum_{j\colon (v,w)\in P_{ij}} \alpha_{ij} \le W_{LP} \le W^*$$

Доказательство (продолжение)

Доказательство

$$\mathbf{E}\left(W(v,w)\right) = \sum_i p_i = \sum_i \sum_{j:\ (v,w)\in P_{ij}} \alpha_{ij} \le W_{LP} \le W^*$$

$$\mathbf{Prob}\left(W(v,w) \ge (1+\beta)W^*\right) \le \left(\frac{e^{\beta}}{(1+\beta)^{(1+\beta)}}\right)^{W^*} = e^{(\beta-(1+\beta)\ln(1+\beta))W^*}$$

Доказательство (продолжение)

Доказательство

$$\mathbf{E}\left(W(v,w)\right) = \sum_i p_i = \sum_i \sum_{j\colon (v,w)\in P_{ij}} \alpha_{ij} \le W_{LP} \le W^*$$

$$\mathbf{Prob}\left(W(v,w) \ge (1+\beta)W^*\right) \le \left(\frac{e^\beta}{(1+\beta)^{(1+\beta)}}\right)^{W^*} = e^{(\beta-(1+\beta)\ln(1+\beta))W^*}$$

при $\beta \le 1$ выполнено неравенство $\beta - (1+\beta)\ln(1+\beta) \le -\beta^2/3$

Доказательство (продолжение)

Доказательство

Поэтому при $\beta = \sqrt{\frac{3 \ln \frac{n^2}{\epsilon}}{W^*}}$ имеем $\mathbf{Prob}\left(W(v, w) \geq (1+\beta)W^*\right) \leq \frac{\epsilon}{n^2}$.

Доказательство (продолжение)

Доказательство

Поэтому при $\beta = \sqrt{\frac{3 \ln \frac{n^2}{\epsilon}}{W^*}}$ имеем $\mathbf{Prob}\left(W(v, w) \geq (1 + \beta)W^*\right) \leq \frac{\epsilon}{n^2}$.
Неравенство $\beta \leq 1$ выполнено при $W^* \geq 6 \ln n - 3 \ln \epsilon$.

Доказательство (продолжение)

Доказательство

Поэтому при $\beta = \sqrt{\frac{3 \ln \frac{n^2}{\epsilon}}{W^*}}$ имеем $\mathbf{Prob}\left(W(v,w) \geq (1+\beta)W^*\right) \leq \frac{\epsilon}{n^2}$. Неравенство $\beta \leq 1$ выполнено при $W^* \geq 6 \ln n - 3 \ln \epsilon$. При таком β

$$(1+\beta)W^* = W^* + \sqrt{3W^* \ln \frac{n^2}{\epsilon}}.$$

Теперь оценим вероятность:

$$\mathbf{Prob}\left(\max_{(v,w)\in E} W(v,w) \geq (1+\beta)W^*\right) \leq \sum_{(v,w)\in E} \mathbf{Prob}\left(W(v,w) \geq (1+\right.$$

$$\leq |E|\frac{\epsilon}{n^2} \leq \epsilon.$$

□

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

- Алгоритм можно дерандомизировать методом условных вероятностей.

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

- Алгоритм можно дерандомизировать методом условных вероятностей.
- Для каждого вещества нам нужно выбрать один из путей.

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

- Алгоритм можно дерандомизировать методом условных вероятностей.
- Для каждого вещества нам нужно выбрать один из путей.
- Рассмотрим дерево высоты k, где у корня есть j_1 сыновей, у каждого из них — j_2 сыновей и т.д.

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

- Алгоритм можно дерандомизировать методом условных вероятностей.
- Для каждого вещества нам нужно выбрать один из путей.
- Рассмотрим дерево высоты k, где у корня есть j_1 сыновей, у каждого из них — j_2 сыновей и т.д.
- На i-м уровне, таким образом, принимается решение, какой путь выбрать для i-го потока.

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

- Алгоритм можно дерандомизировать методом условных вероятностей.
- Для каждого вещества нам нужно выбрать один из путей.
- Рассмотрим дерево высоты k, где у корня есть j_1 сыновей, у каждого из них — j_2 сыновей и т.д.
- На i-м уровне, таким образом, принимается решение, какой путь выбрать для i-го потока.
- Листья данного дерева представляют допустимые решения нашей задачи.

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

Определим

$$g(l_1, \ldots, l_i) = \mathbf{Prob}\left(\max_{(v,w)\in E} W(v,w) \geq (1+\beta)W^* \,\middle|\, \begin{array}{c} l_1 \text{ для вещества } 1 \\ l_2 \text{ для вещества } 2 \\ \vdots \\ l_i \text{ для вещества } i \end{array} \right)$$

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

Определим

$$g(l_1, \ldots, l_i) = \mathbf{Prob}\left(\max_{(v,w)\in E} W(v,w) \geq (1+\beta)W^* \,\middle|\, \begin{array}{c} l_1 \text{ для вещества } 1 \\ l_2 \text{ для вещества } 2 \\ \vdots \\ l_i \text{ для вещества } i \end{array} \right)$$

Ясно, что

$$g(l_1, \ldots, l_{i-1}) = \sum_{j=1}^{j_i} \alpha_{ij} g(l_1, \ldots, l_{i-1}, j) \geq \min_j g(l_1, \ldots, l_{i-1}, j).$$

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

- Таким образом, если бы мы могли вычислять $g(l_1, \dots, l_i)$ эффективно, мы бы начали с $g(\emptyset)$ и, выбирая минимум на каждом шаге, построили бы последовательность $g(\emptyset) \geq g(l_1) \geq g(l_1, l_2) \geq \cdots \geq g(l_1, \dots, l_k)$.

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

- Таким образом, если бы мы могли вычислять $g(l_1, \ldots, l_i)$ эффективно, мы бы начали с $g(\emptyset)$ и, выбирая минимум на каждом шаге, построили бы последовательность $g(\emptyset) \geq g(l_1) \geq g(l_1, l_2) \geq \cdots \geq g(l_1, \ldots, l_k)$.
- Однако непонятно, как именно вычислять такие вероятности.

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

- Таким образом, если бы мы могли вычислять $g(l_1, \dots, l_i)$ эффективно, мы бы начали с $g(\emptyset)$ и, выбирая минимум на каждом шаге, построили бы последовательность $g(\emptyset) \geq g(l_1) \geq g(l_1, l_2) \geq \dots \geq g(l_1, \dots, l_k)$.
- Однако непонятно, как именно вычислять такие вероятности.
- Из оценок Чернова можно вывести некоторую верхнюю оценку $h(l_1, \dots, l_i)$ на $g(l_1, \dots, l_i)$, вычислить которую легко.

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

- Таким образом, если бы мы могли вычислять $g(l_1, \dots, l_i)$ эффективно, мы бы начали с $g(\emptyset)$ и, выбирая минимум на каждом шаге, построили бы последовательность $g(\emptyset) \geq g(l_1) \geq g(l_1, l_2) \geq \cdots \geq g(l_1, \dots, l_k)$.
- Однако непонятно, как именно вычислять такие вероятности.
- Из оценок Чернова можно вывести некоторую верхнюю оценку $h(l_1, \dots, l_i)$ на $g(l_1, \dots, l_i)$, вычислить которую легко.
- После этого выичсляется последовательность $1 > \epsilon \geq h(\emptyset) \geq h(l_1, l_2) \geq \cdots \geq h(l_1, \dots, l_k) \geq g(l_1, \dots, l_k)$.

Дерандомизация (основная идея)

Дерандомизация (основная идея)

- Таким образом, если бы мы могли вычислять $g(l_1, \dots, l_i)$ эффективно, мы бы начали с $g(\emptyset)$ и, выбирая минимум на каждом шаге, построили бы последовательность $g(\emptyset) \geq g(l_1) \geq g(l_1, l_2) \geq \cdots \geq g(l_1, \dots, l_k)$.
- Однако непонятно, как именно вычислять такие вероятности.
- Из оценок Чернова можно вывести некоторую верхнюю оценку $h(l_1, \dots, l_i)$ на $g(l_1, \dots, l_i)$, вычислить которую легко.
- После этого выичсляется последовательность $1 > \epsilon \geq h(\emptyset) \geq h(l_1, l_2) \geq \cdots \geq h(l_1, \dots, l_k) \geq g(l_1, \dots, l_k)$.
- Иэ этого следует, что $g(l_1, \dots, l_k) = 0$.

Что мы узнали за сегодня?

Что мы узнали за сегодня?

Что мы узнали за сегодня?

Что мы узнали за сегодня?

- Задача о потоке в сети с несколькими веществами NP-трудна.

Что мы узнали за сегодня?

Что мы узнали за сегодня?

- Задача о потоке в сети с несколькими веществами NP-трудна.
- Может быть решена приближенно релаксацией целочисленной задачи линейного программирования с последующим случайным выбором путей.

Что мы узнали за сегодня?

Что мы узнали за сегодня?

- Задача о потоке в сети с несколькими веществами NP-трудна.
- Может быть решена приближенно релаксацией целочисленной задачи линейного программирования с последующим случайным выбором путей.
- Алгоритм можно дерандомизировать методом условных вероятностей.

Спасибо за внимание!