

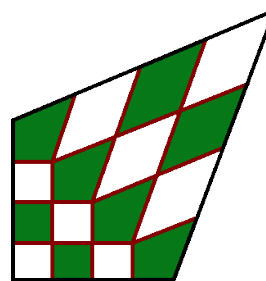
# Математика в компьютерной графике

URL: <http://www.school30.spb.ru/cgsg/cgc/>

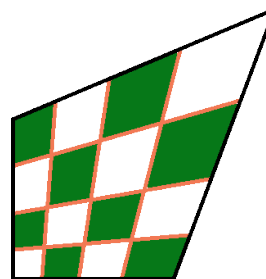
E-mail: [CGSG@yandex.ru](mailto:CGSG@yandex.ru)

- свободные векторы, радиус векторы, операции с векторами, скалярное и векторное произведение векторов (vector dot & cross production)
- базис, координаты, декартова система координат
- матрицы, операции с матрицами, обращение матриц

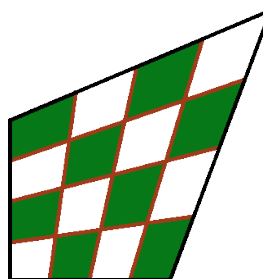
- Аффинные



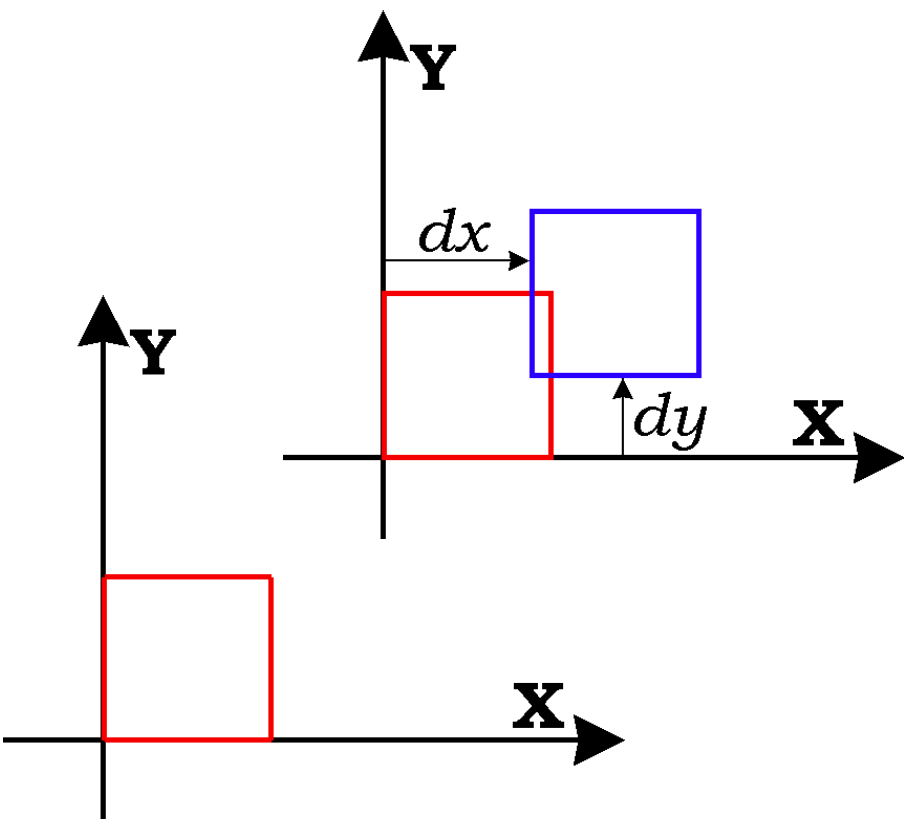
- Перспективные



- Билинейные

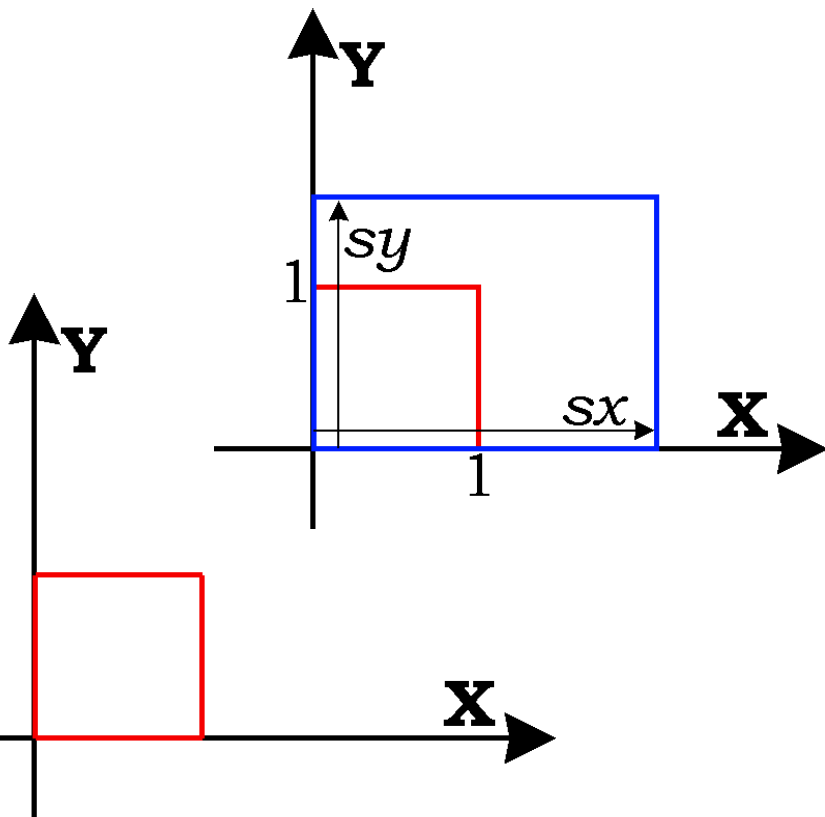


- *Параллельный перенос (translation)*



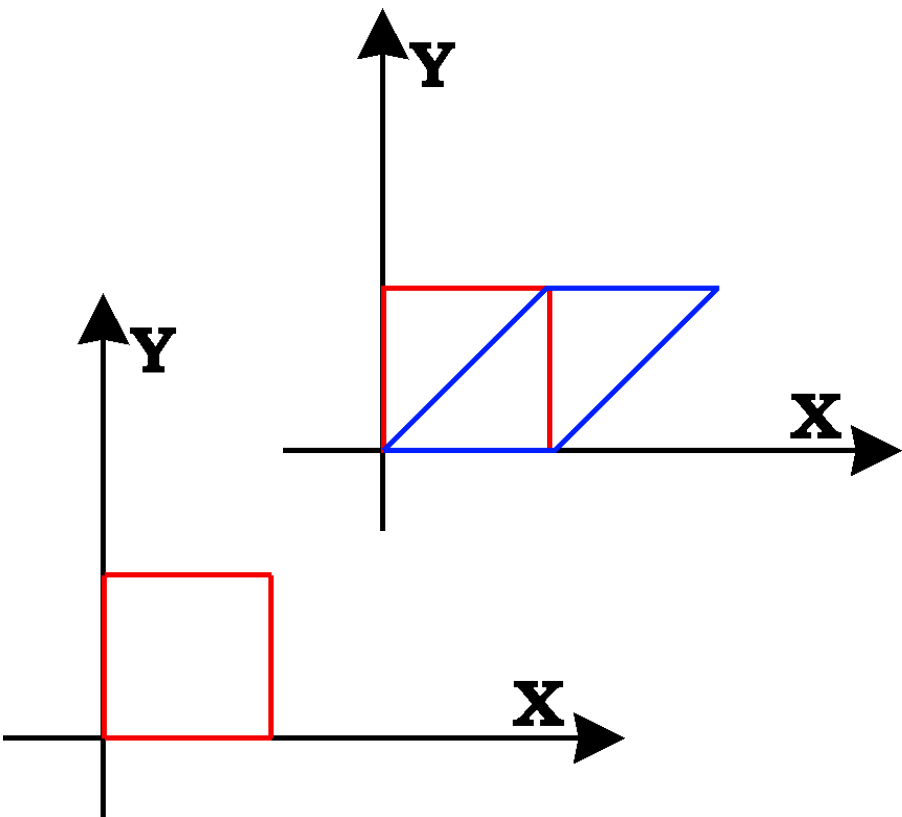
$$\begin{cases} x' = x + dx \\ y' = y + dy \end{cases}$$

- Масштабирование (*scaling*)

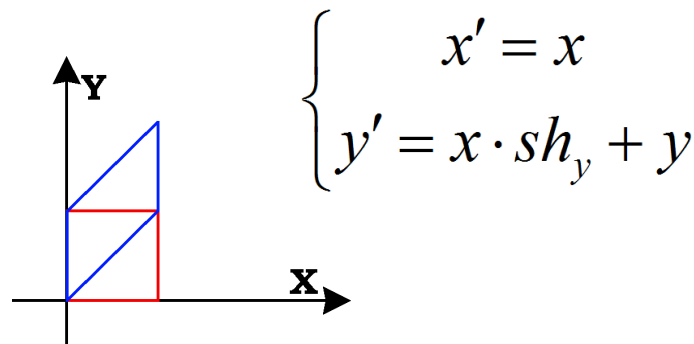


$$\begin{cases} x' = x \cdot sx \\ y' = y \cdot sy \end{cases}$$

- Сдвиг (*shearing*)

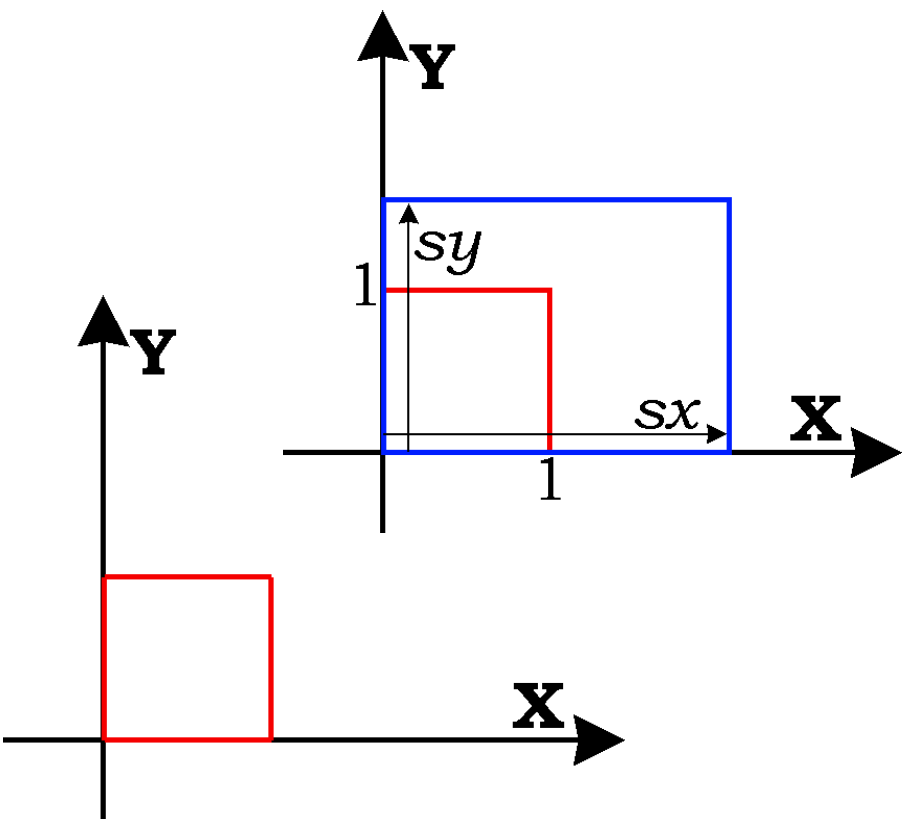


$$\begin{cases} x' = x + y \cdot sh_x \\ y' = y \end{cases}$$



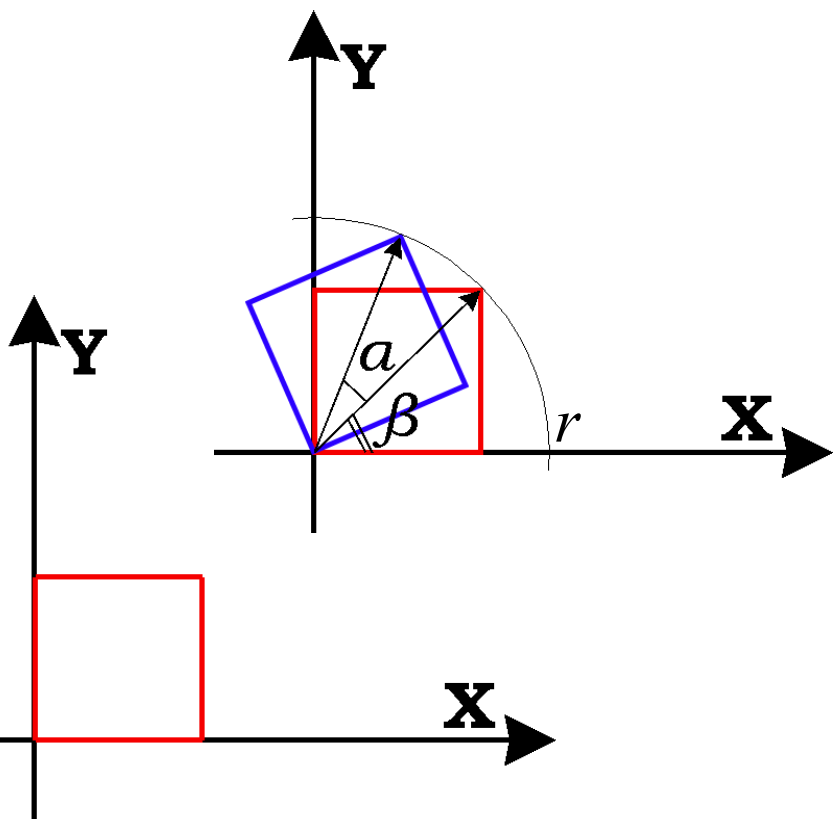
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x \cdot sh_y + y \end{cases}$$

- Масштабирование (*scaling*)



$$\begin{cases} x' = x \cdot sx \\ y' = y \cdot sy \end{cases}$$

- *Поворот относительно начала координат (rotation)*



$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\beta) \\ y = r \cdot \sin(\beta) \end{cases} \begin{cases} x' = r \cdot \cos(\alpha + \beta) \\ y' = r \cdot \sin(\alpha + \beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \underline{r} \cdot \cos(\alpha) \cdot \underline{\cos(\beta)} - \underline{r} \cdot \sin(\alpha) \cdot \underline{\sin(\beta)} \\ y' = \underline{r} \cdot \cos(\alpha) \cdot \underline{\sin(\beta)} + \underline{r} \cdot \sin(\alpha) \cdot \underline{\cos(\beta)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha) \\ y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$



- Перепишем в матричном виде общую запись аффинных преобразований:

$$\begin{cases} x' = x \cdot a + y \cdot b + l \\ y' = x \cdot c + y \cdot d + m \end{cases}$$

$$(x' \quad y') = (x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + (l \quad m)$$

## Однородные координаты (homogeneous)

- представим координаты на плоскости (2D) трехкомпонентной вектор-строкой:

$$(x, y) = (X/w \quad Y/w \quad 1) = (X \quad Y \quad w)$$

- будем полагать  $w=1$

$$(x, y) = (x \quad y \quad 1)$$

- перепишем преобразование в общем виде:

$$(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$

~ translation

$$T(dx, dy) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & 1 \end{pmatrix}$$

~ shear by x

$$Shx(sh_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~ shear by y

$$Shy(sh_y) = \begin{pmatrix} 1 & sh_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~ scaling

$$S(sx, sy) = \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~ rotation

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- подвергнем точку последовательным преобразованиям системы координат:

$$(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1) \cdot M_1$$

$$(x'' \quad y'' \quad 1) = (x' \quad y' \quad 1) \cdot M_2$$

$$(x''' \quad y''' \quad 1) = (x'' \quad y'' \quad 1) \cdot M_3$$

- перепишем:

$$(x' \quad y' \quad 1) = (((x \quad y \quad 1) \cdot M_1) \cdot M_2) \cdot M_3$$

- в силу ассоциативности:

$$(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1) \cdot (M_1 \cdot M_2 \cdot M_3)$$

$$(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1) \cdot M_{transform}$$

$$(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1) \cdot M_{transform}$$

$$(x \quad y \quad 1) = (x' \quad y' \quad 1) \cdot M_{transform}^{-1}$$

$$M_{transform} = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{transform}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -c & 0 \\ -b & a & 0 \\ bm - ld & lc - am & ad - bc \end{pmatrix}$$

# Преобразование точек, векторов и нормалей

- точка (радиус-вектор) ( $p$ ):  

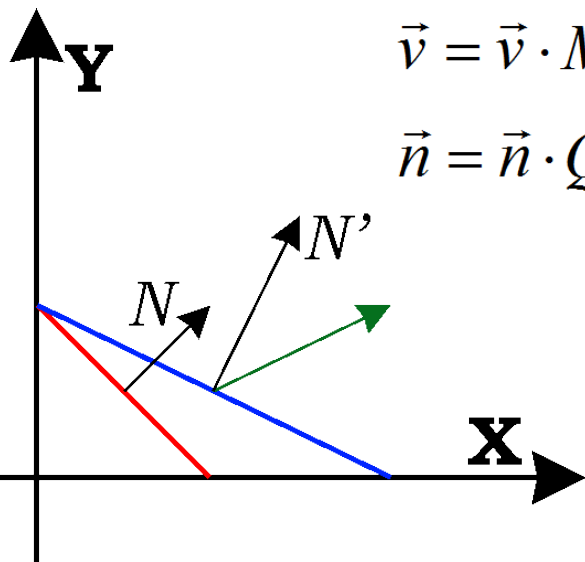
$$(x \quad y \quad 1)$$
- вектор ( $v$ ) и нормаль ( $n$ ) (только направление):  

$$(x \quad y \quad 0)$$
- преобразования:

$$\vec{p}' = \vec{p} \cdot M_{transform} \Leftrightarrow (x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1) \cdot M_{transform}$$

$$\vec{v} = \vec{v} \cdot M_{transform} \Leftrightarrow (x' \quad y' \quad 0) = (x \quad y \quad 0) \cdot M_{transform}$$

$$\vec{n} = \vec{n} \cdot Q_{transform} \Leftrightarrow (x' \quad y' \quad 0) = (x \quad y \quad 0) \cdot Q_{transform}$$



$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \quad \vec{n}' \cdot \vec{v}' = 0$$

$$(\vec{n} \cdot Q_{transform}) \cdot (\vec{v} \cdot M_{transform}) = 0$$

$$\vec{n}' = \vec{n} \cdot Q_{transform} \quad \vec{v}' = \vec{v} \cdot M_{transform}$$

$$\vec{n} = (A, B) \quad \vec{v} = (x, y)$$

$$(A \ B \ 0) \cdot (x \ y \ 0)^T = 0$$

$$((A \ B \ 0) \cdot Q_{transform}) \cdot ((x \ y \ 0) \cdot M_{transform})^T = 0$$

$$(A \ B \ 0) \cdot (Q_{transform} \cdot M_{transform}^T) \cdot (x \ y \ 0)^T = 0$$

$$Q_{transform} \cdot M_{transform}^T = E \Rightarrow Q_{transform} = M_{transform}^{-1 T}$$

Одно преобразование:

$$(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & l \\ c & d & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Композиция преобразований:

$$(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1) \cdot (M_1 \cdot M_2 \cdot M_3)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (M_3 \cdot M_2 \cdot M_1) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$



- заданы точки соответствия

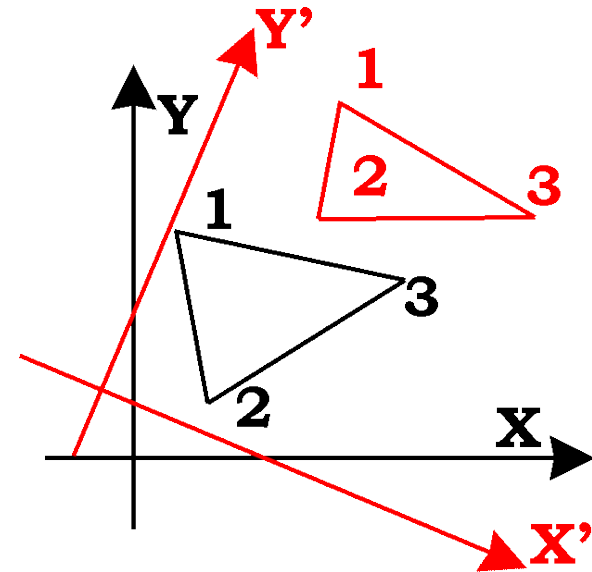
$$(x_0 \quad y_0) \leftrightarrow (x'_0 \quad y'_0)$$

$$(x_1 \quad y_1) \leftrightarrow (x'_1 \quad y'_1)$$

$$(x_2 \quad y_2) \leftrightarrow (x'_2 \quad y'_2)$$

- найти «матрицу перехода»

$$P = P' \cdot M, \quad M = ?$$



# Пример: привязка систем координат

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 & y'_0 & 1 \\ x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = G' \cdot M$$

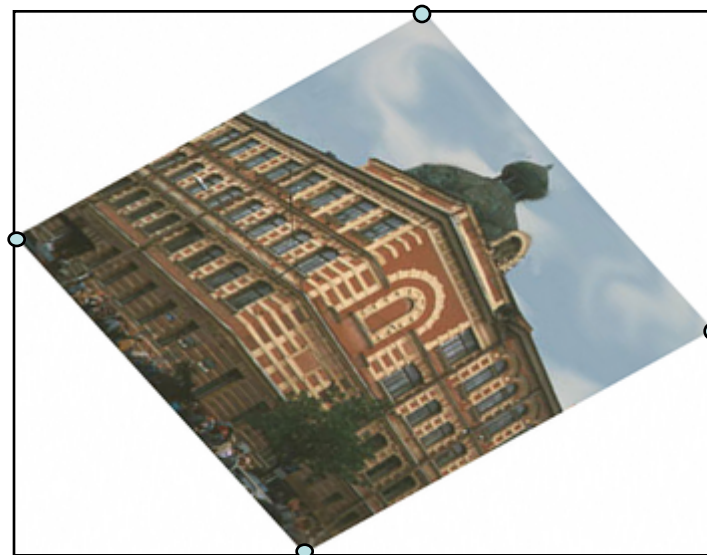
$$\begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det G'} \cdot \begin{pmatrix} y'_1 - y'_2 & y'_2 - y'_0 & y'_0 - y'_1 \\ x'_2 - x'_1 & x'_0 - x'_2 & x'_1 - x'_0 \\ x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 & x'_2 y'_0 - x'_0 y'_2 & x'_2 y'_1 - x'_1 y'_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$$

здесь:  $\det G' = x'_0 \cdot (y'_1 - y'_2) - y'_0 \cdot (x'_1 - x'_2) + (x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1)$

=> Прямое отображение (direct mapping) =>

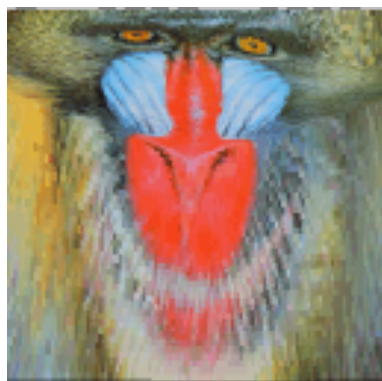
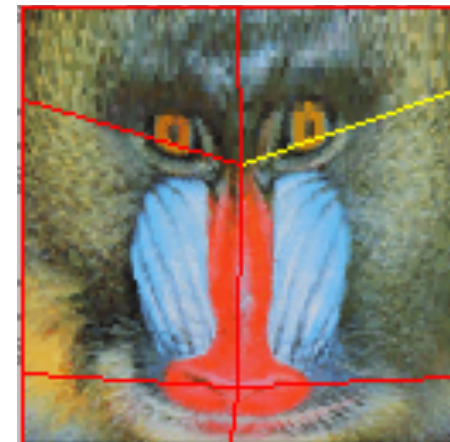
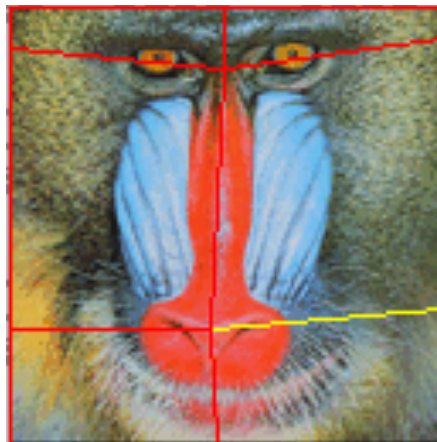


Поворот и масштабирование

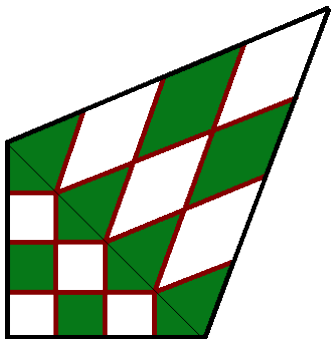


<= Обратное отображение (inverse mapping) <=

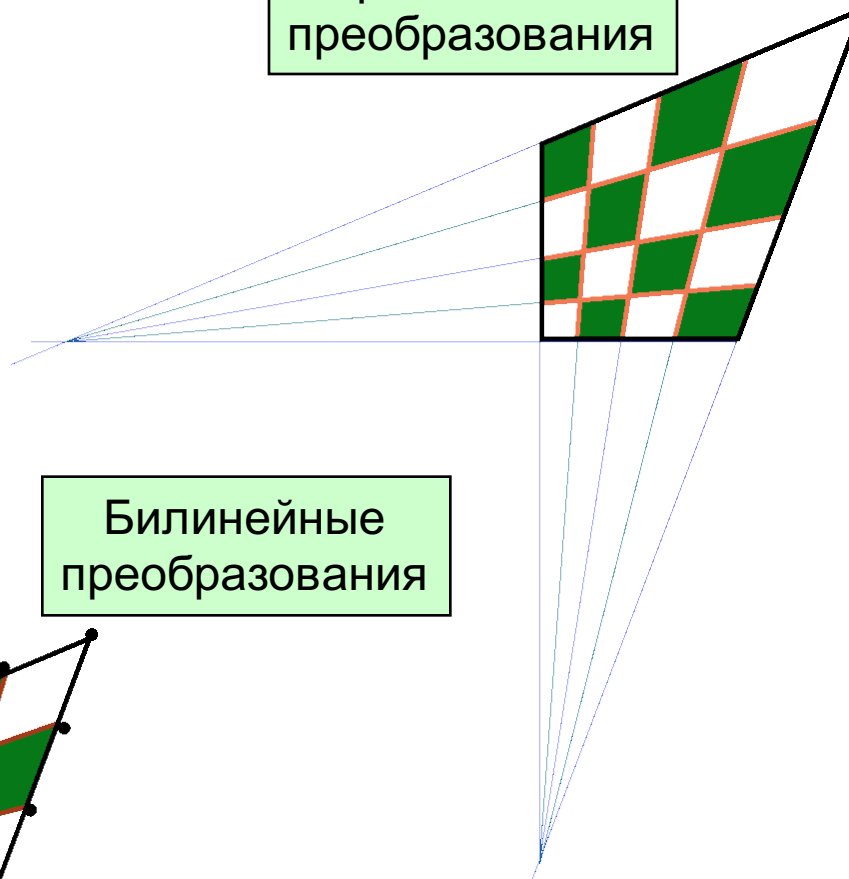
- Регулярная сетка для областей соответствия



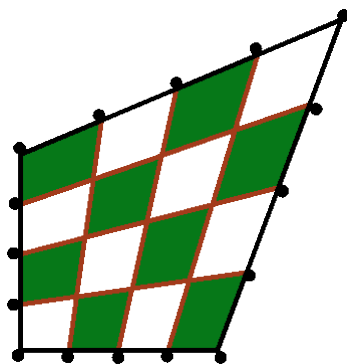
Аффинные преобразования



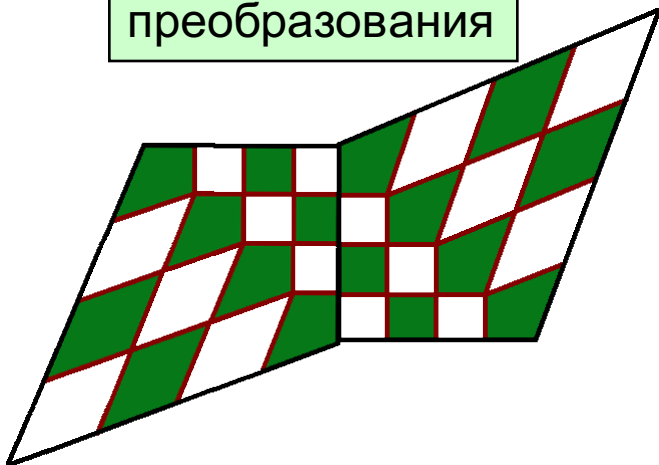
Перспективные преобразования



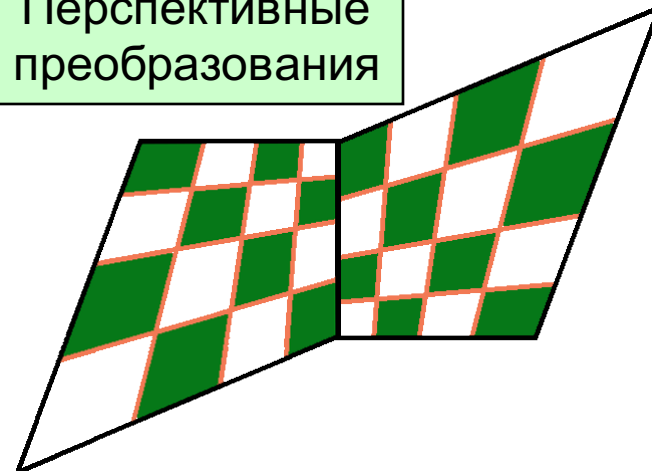
Билинейные преобразования



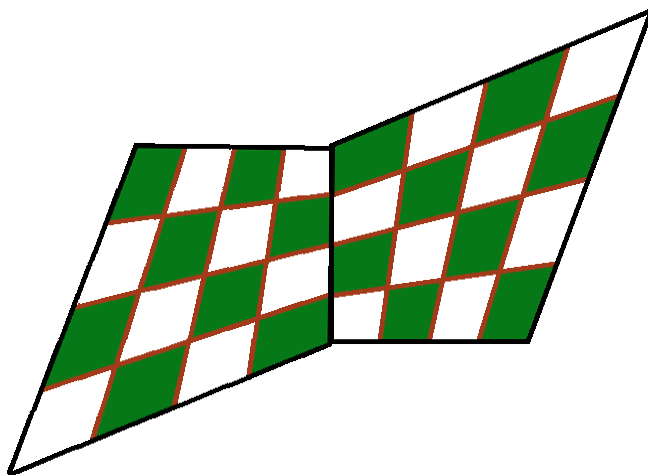
Аффинные  
преобразования



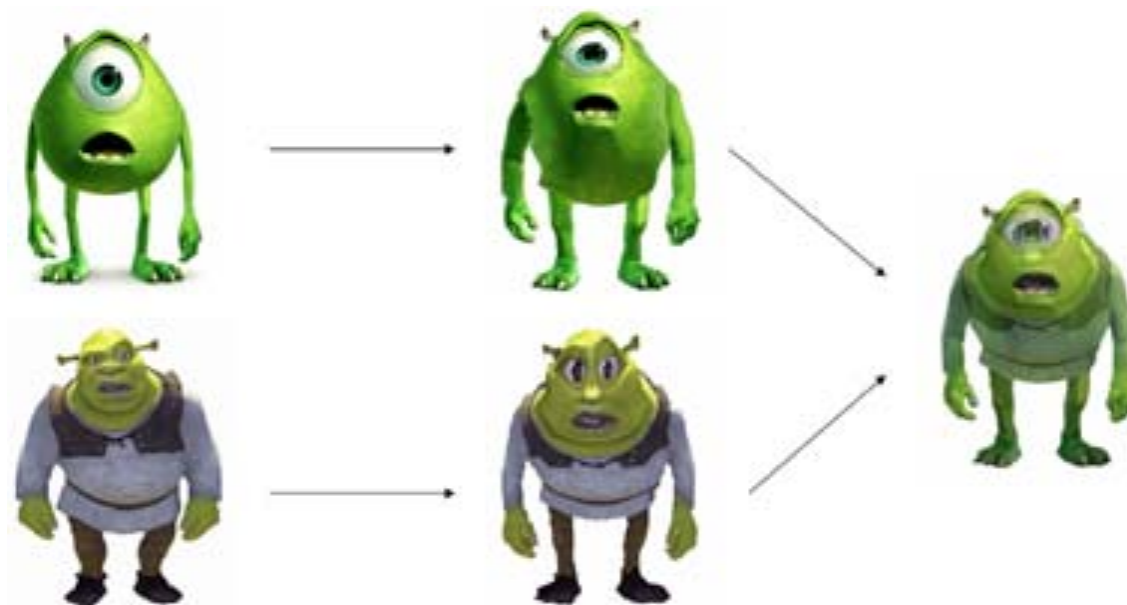
Перспективные  
преобразования



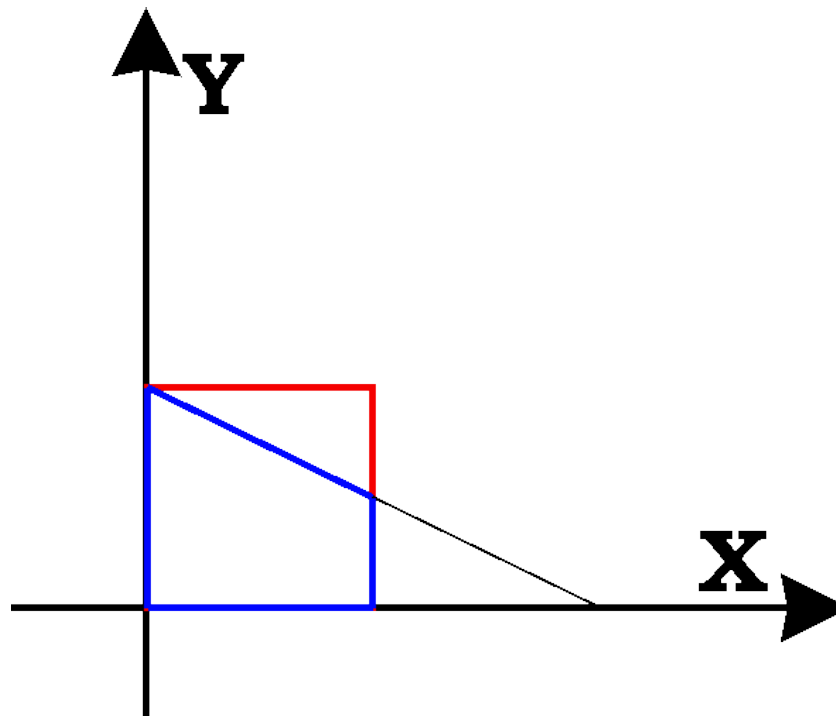
Билинейные  
преобразования



morphing = warping + интерполяция цвета



$$\begin{pmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$





- общая формула:

$$(x \quad y \quad w) = (x' \quad y' \quad w') \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- прямое отображение:

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}w'$$

$$y = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}w'$$

$$w = a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}w'$$

- полагаем  $w=1$ , итоговая формула для координат:

$$\frac{x}{w} = \frac{a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}}{a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}}$$

$$\frac{y}{w} = \frac{a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}}{a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}}$$

## Привязка с перспективным преобразованием (2)

- получаем матрицу обратного отображения
- определитель присутствует и в числителе и в знаменателе – вычислять не нужно:

$$(x' \quad y' \quad w') = (x \quad y \quad w) \cdot \check{M} = (x \quad y \quad w) \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

- находим присоединенную матрицу:

$$\check{M} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{32}a_{31} - a_{33}a_{21} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{21} \\ a_{21}a_{31} - a_{31}a_{22} & a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

- Задача привязки: по 4 точкам соответствия определить матрицу перехода:

$$(x_0 \quad y_0) \leftrightarrow (x'_0 \quad y'_0)$$

$$(x_1 \quad y_1) \leftrightarrow (x'_1 \quad y'_1)$$

$$(x_2 \quad y_2) \leftrightarrow (x'_2 \quad y'_2)$$

$$(x_3 \quad y_3) \leftrightarrow (x'_3 \quad y'_3)$$

$$P = P' \cdot M, \quad M = ?$$

- запишем зависимость (выразим координаты  $x$  и  $y$ ):

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31} - a_{13}x'x - a_{23}y'x$$

$$y = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32} - a_{13}x'y - a_{23}y'y$$

- выпишем в матричной форме 8 уравнений:

$$\begin{pmatrix} x'_0 & y'_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_0x_0 & -y'_0x_0 \\ x'_1 & y'_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_1x_1 & -y'_1x_1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_2x_2 & -y'_2x_2 \\ x'_3 & y'_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_3x_3 & -y'_3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x'_0 & y'_0 & 1 & -x'_0y_0 & -y'_0y_0 \\ 0 & 0 & 0 & x'_1 & y'_1 & 1 & -x'_1y_1 & -y'_1y_1 \\ 0 & 0 & 0 & x'_2 & y'_2 & 1 & -x'_2y_2 & -y'_2y_2 \\ 0 & 0 & 0 & x'_3 & y'_3 & 1 & -x'_3y_3 & -y'_3y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

- для упрощения задачи переход ищем из единичного квадрата:

$$(x_0 \quad y_0) \leftrightarrow (0 \quad 0)$$

$$(x_1 \quad y_1) \leftrightarrow (1 \quad 0)$$

$$(x_2 \quad y_2) \leftrightarrow (1 \quad 1)$$

$$(x_3 \quad y_3) \leftrightarrow (0 \quad 1)$$

- получаем:

$$a_{31} = x_0$$

$$a_{11} + a_{31} - a_{13}x_1 = x_1$$

$$a_{11} + a_{21} + a_{31} - a_{13}x_2 - a_{23}x_2 = x_2$$

$$a_{21} + a_{31} - a_{23}x_3 = x_3$$

$$a_{32} = y_0$$

$$a_{12} + a_{32} - a_{13}y_1 = y_1$$

$$a_{12} + a_{22} + a_{32} - a_{13}y_2 - a_{23}y_2 = y_2$$

$$a_{22} + a_{32} - a_{23}y_3 = y_3$$

- обозначаем:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_2 \quad \Delta x_2 = x_3 - x_2 \quad \Delta x_3 = x_0 - x_1 + x_2 - x_3$$

$$\Delta y_1 = y_1 - y_2 \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2 \quad \Delta y_3 = y_0 - y_1 + y_2 - y_3$$

- и находим решение:

$$a_{13} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_3 & \Delta x_2 \\ \Delta y_3 & \Delta y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 \end{vmatrix}}$$

$$a_{11} = x_1 - x_0 + a_{13}x_1$$

$$a_{21} = x_3 - x_0 + a_{23}x_3$$

$$a_{31} = x_0$$

$$a_{23} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_3 \\ \Delta y_1 & \Delta y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 \end{vmatrix}}$$

$$a_{12} = y_1 - y_0 + a_{13}y_1$$

$$a_{22} = y_3 - y_0 + a_{23}y_3$$

$$a_{32} = y_0$$

- Аналогично случаю 2D вводим однородные координаты:

$$(x, y, z) = (X/w \quad Y/w \quad Z/w \quad 1)$$

- и преобразования в общем случае:

$$(x' \quad y' \quad z' \quad 1) = (x \quad y \quad z \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

~ translation

$$T(dx, dy, dz) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & dz & 1 \end{pmatrix}$$

~ scaling

$$S(sx, sy, sz) = \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



~ rotation

$$Rz(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rx(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ry(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Матрицы 3D преобразований (поворот вокруг оси)

- Поворот вокруг произвольной оси, проходящей через начало координат. Ось задается нормированным радиус вектором. Вывод через кватернионы (самостоятельно).

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$X = \sin \alpha \cdot x \quad Y = \sin \alpha \cdot y \quad Z = \sin \alpha \cdot z$$

$$R(\alpha, x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 - 2(Y^2 + Z^2) & 2 \cdot X \cdot Y - 2 \cdot \cos \alpha \cdot Z & 2 \cdot \cos \alpha \cdot Y + 2 \cdot X \cdot Z & 0 \\ 2 \cdot X \cdot Y + 2 \cdot \cos \alpha \cdot Z & 1 - 2(X^2 + Z^2) & 2 \cdot Y \cdot Z - 2 \cdot \cos \alpha \cdot X & 0 \\ 2 \cdot X \cdot Z - 2 \cdot \cos \alpha \cdot Y & 2 \cdot \cos \alpha \cdot X + 2 \cdot Y \cdot Z & 1 - 2(X^2 + Y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~ rotation

## Пример: построение матрицы камеры (1)

- камера задается: позиция  $C$  и векторы направление «вверх»  $V$ , «вправо»  $U$  и вперед  $N$ .
- ищем преобразование в виде «перенос+поворот»:

$$M = T \cdot B$$

где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -Cx & -Cy & -Cz & 1 \end{pmatrix}$$

## Пример: построение матрицы камеры (2)

- после преобразования вектора отобразятся:

$$U \rightarrow (1,0,0)$$

$$V \rightarrow (0,1,0)$$

$$N \rightarrow (0,0,1)$$

т.е.

$$(U_x \quad U_y \quad U_z \quad 1) \cdot B = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

$$(V_x \quad V_y \quad V_z \quad 1) \cdot B = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$$

$$(N_x \quad N_y \quad N_z \quad 1) \cdot B = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$$

- зная

$$Ux^2 + Uy^2 + Uz^2 = 1 \text{ и т.д.}$$

$$Ux \cdot Vx + Uy \cdot Vy + Uz \cdot Vz = 0 \text{ и т.д.}$$

находим

$$B = \begin{pmatrix} Ux & Vx & Nx & 0 \\ Uy & Vy & Ny & 0 \\ Uz & Vz & Nz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# • Практические задания

- Реализовать warping изображения (срок – 6.11.2011):
  - все изображение трансформируется билинейным преобразованием (один элемент соответствия)
  - Изображение разделяется на треугольники – зоны соответствия. Искажение получается в соответствии с изменением сетки треугольников.