Визуализация графов

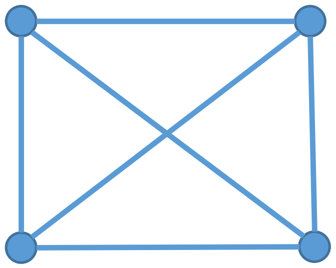
Computer Science клуб, март 2014

Александр Дайняк, ФИВТ МФТИ

www.dainiak.com

Планарные графы

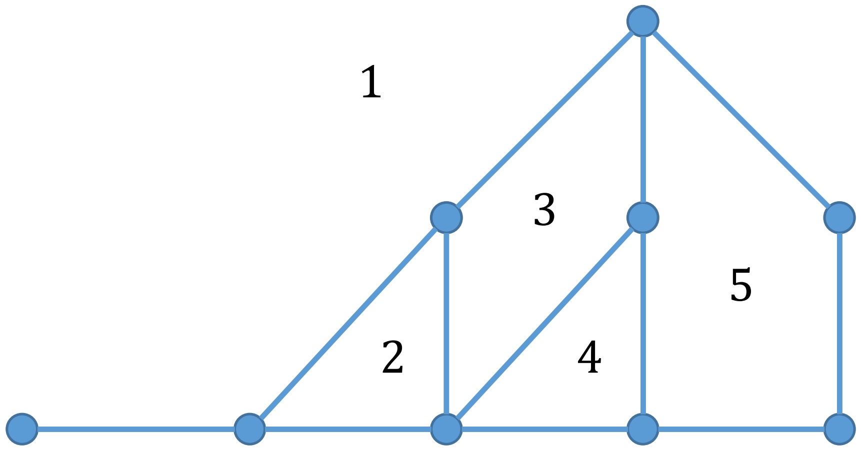
Планарный граф — это граф, для которого существует плоская укладка без пересекающихся рёбер.

Например, граф  планарный

Планарные графы

Грань плоской укладки — это область плоскости, отделяемая укладкой.

Пример:



k-связность

k-связный (*k-вершинно-связный*) граф — это такой связный граф, что чтобы сделать его несвязным или одновершинным, нужно удалить *не менее* k вершин.

Тривиальные наблюдения:

- 1-связные графы — это то же, что и связные графы
- Если граф $(k+1)$-связен, то он и k-связен
- Если из k-связного графа удалить любые l вершин, то граф останется по крайней мере $(k-l)$-связным

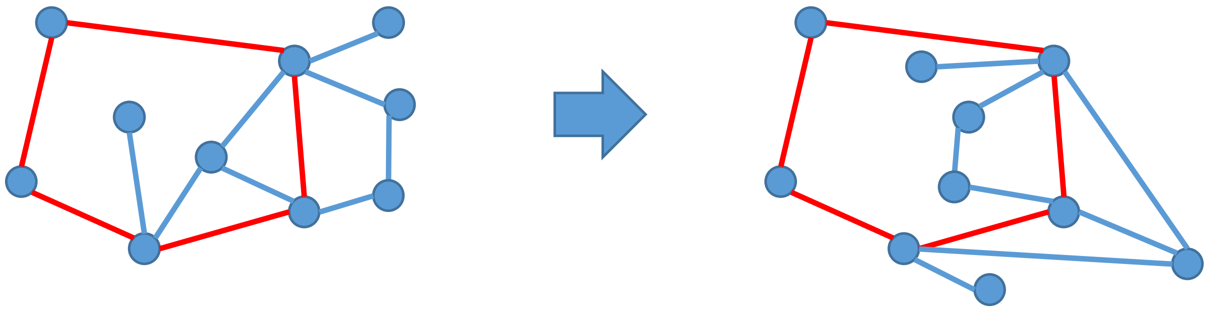
Нетривиальное наблюдение — **теорема Менгера**:
Граф является k-связным т. и т.т., когда любую пару вершин графа можно соединить k цепями, не имеющими общих внутренних вершин.

Циклы в планарных графах

Утверждение.
Пусть в некоторой укладке планарного графа внутри некоторого цикла C лежит множество рёбер E_{int}, а снаружи множество рёбер E_{ext}.

Тогда существует и укладка этого графа, в которой внутри C лежат рёбра E_{ext}, а снаружи рёбра E_{int}.

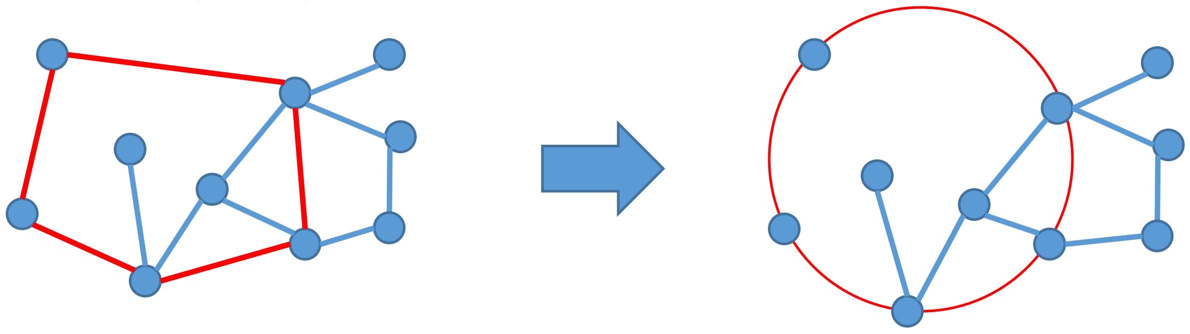
Пример:



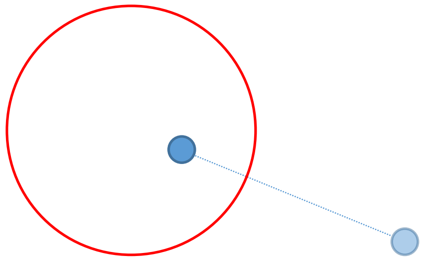
Циклы в планарных графах

Идея доказательства.

Сначала деформируем изображение графа, так, чтобы изображение цикла C стало окружностью, и при этом через центр окружности не проходили никакие рёбра.

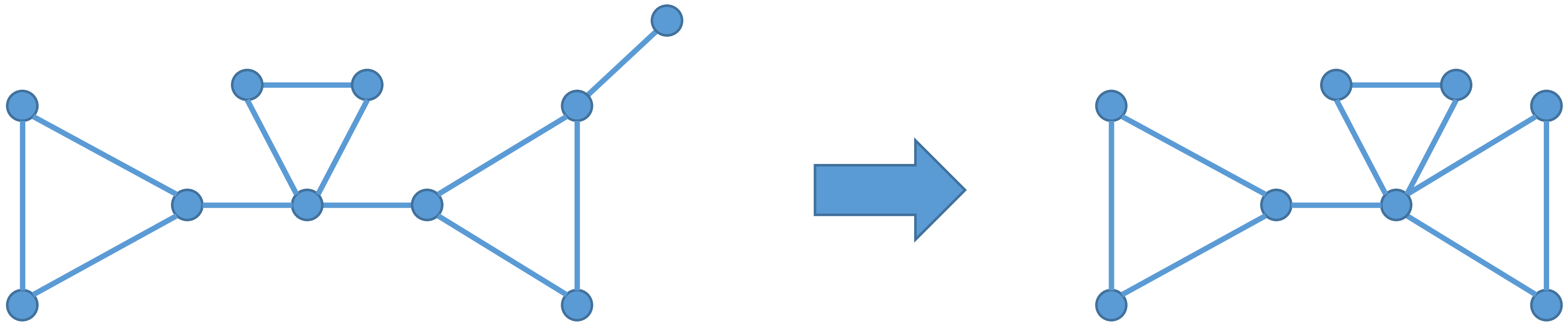


Затем выполняем инверсию плоскости относительно этой окружности.

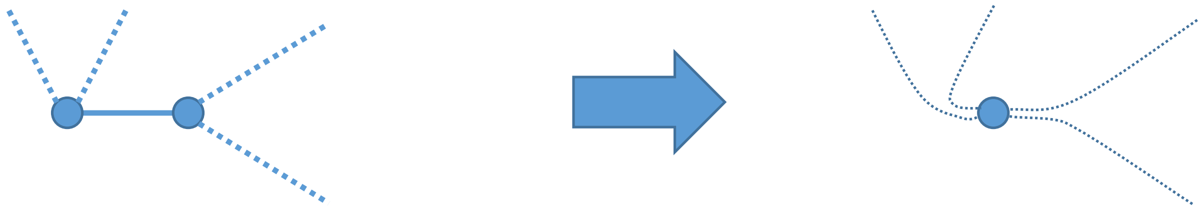


Стягивание рёбер

- Граф G является *стягиваемым к графу* G', если G' можно получить из G, применив некоторое количество раз операцию стягивания ребра

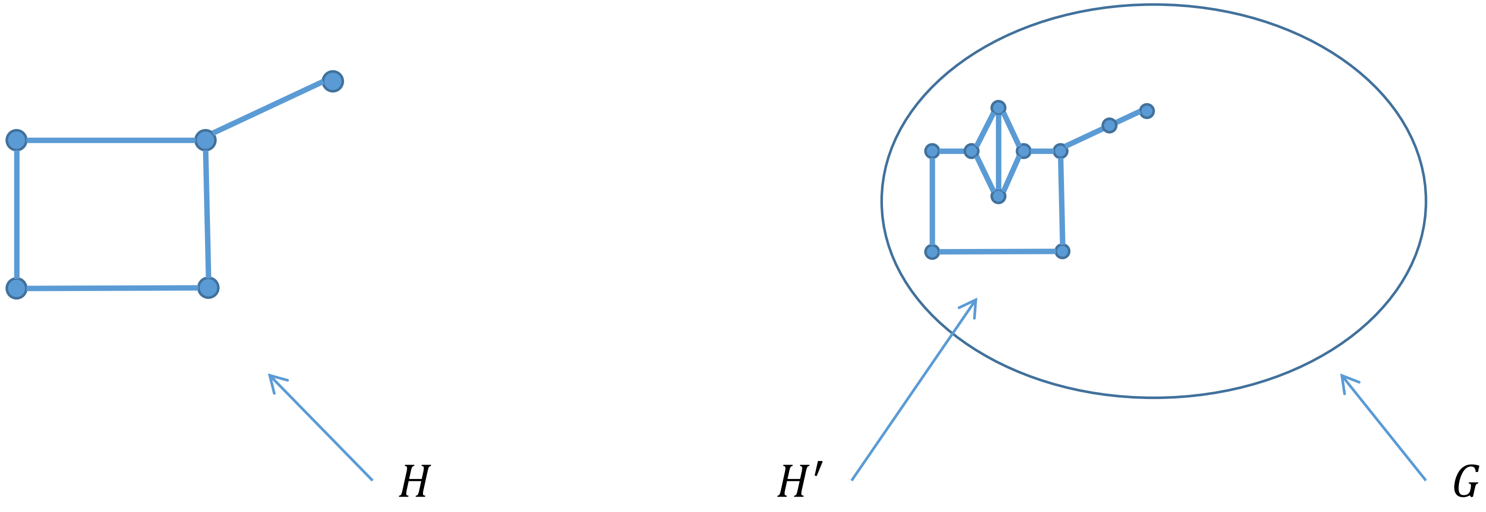


- Если граф G планарен, то и граф G' планарен:



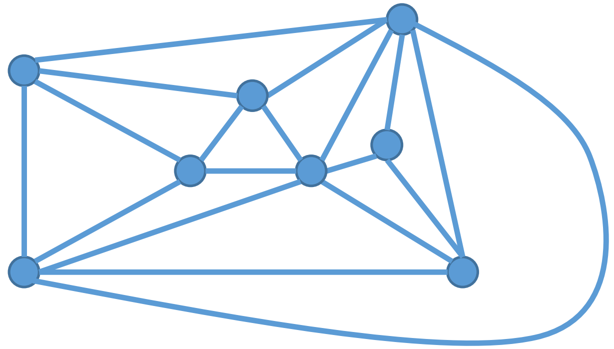
Миноры

- Граф H является *минором* графа G, если в G есть подграф H', который можно стянуть к H



Триангуляции

Триангуляция — это граф, в укладке которого каждая грань ограничена треугольником (в «графовом», а не геометрическом смысле).



Триангуляции

Утверждение.
Если в планарном графе на n вершинах менее $(3n-6)$ рёбер, то в граф можно добавить ребро, так, чтобы он остался планарным.

Доказательство.
Если в графе менее $(3n-6)$ рёбер, то в его укладке есть грань, граница которой не является треугольником.
В этой грани можно провести новое ребро.

Триангуляции

Утверждение.
Если в планарном графе на n вершинах менее $(3n-6)$ рёбер, то в граф можно добавить ребро, так, чтобы он остался планарным.

Утверждение.
В любой триангуляции на n вершинах ровно $(3n-6)$ рёбер.

Утверждение.
Любой планарный граф является подграфом некоторой триангуляции.

Триангуляции трёхсвязны

Утверждение.
Любая триангуляция (на более чем трёх вершинах) трёхсвязна.

Доказательство.

Пусть G — триангуляция.

Предположим, что граф G не трёхсвязен, и придём к противоречию.

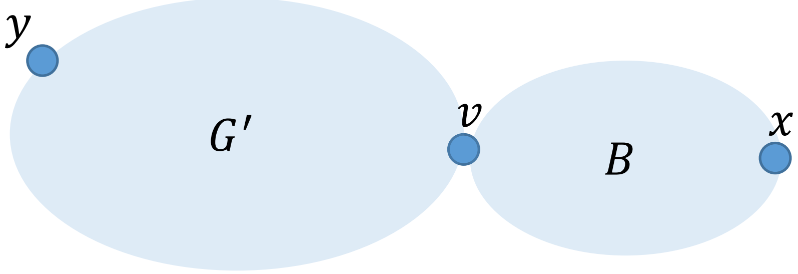
Триангуляции трёхсвязны

Если G не двухсвязен, то в G есть концевой блок B, имеющий с остальной частью G' графа G единственную общую точку сочленения v.

Рассмотрим укладку G, в которой v лежит на внешней грани.

У B и G' есть соответственно вершины x и y ($x, y \neq v$) на внешней грани. При этом $xy \notin E(G)$, но можно добавить ребро xy в укладку.

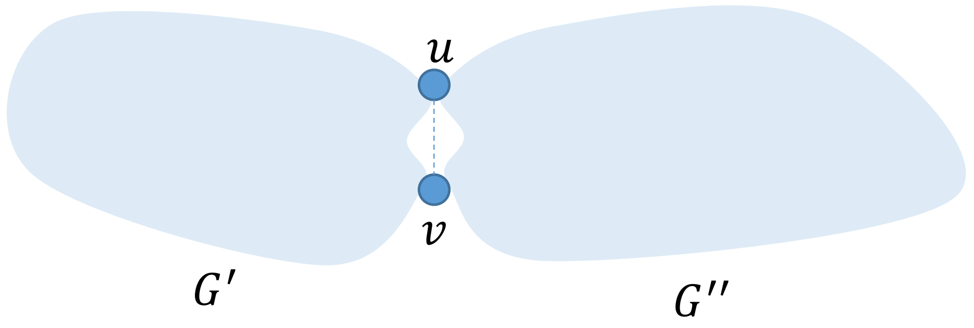
Это противоречит тому, что триангуляция является *максимальным* планарным графом.



Триангуляции трёхсвязны

Итак, G двухсвязен.

Если G не трёхсвязен, то можно выделить подграф G', который имеет с остальной частью G'' графа G только две общие вершины u, v.

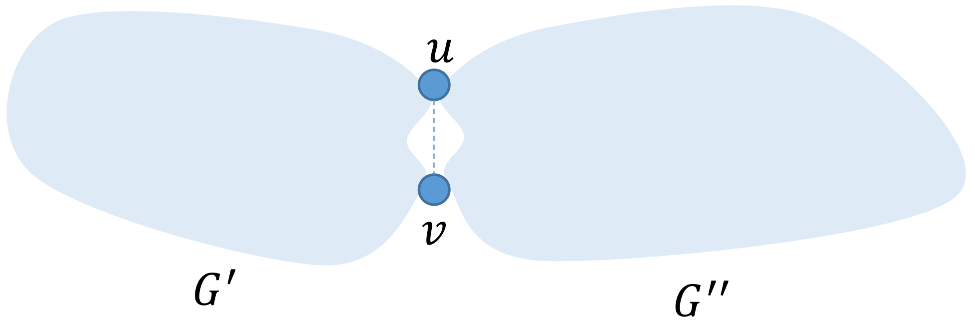


Триангуляции трёхсвязны

Граф $(G'' + uv)$ является минором G.

Аналогично, $(G' + uv)$ является минором G.

Т.к. G планарен, то графы $(G' + uv)$ и $(G'' + uv)$ планарны.

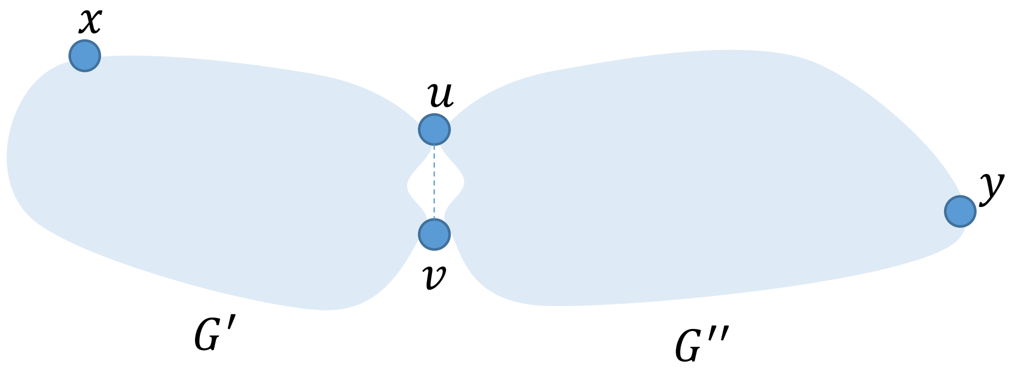


Триангуляции трёхсвязны

Возьмём укладки графов $(G' + uv)$ и $(G'' + uv)$, в которых ребро uv лежит на границе внешней грани.

Из них можно построить укладку G, в которой на внешней грани есть пара вершин x и y, отличных от u, v, и не соединённых ребром.

Это противоречит тому, что G — триангуляция.



Укладки двусвязных графов

Утверждение.

В любой укладке двусвязного графа граница каждой грани является простым циклом.

Теорема Татта о комбинаторном критерии «гранности»

Теорема. (Tutte ’1963)
В укладке трёхсвязного планарного графа G подграф B образует границу грани т. и т.т., когда выполнены два условия:

- B является порождённым простым циклом в G
(то есть у B нет «хорд» в G),
- граф $(G - B)$ связен.

Укладки трёхсвязных графов

Доказательство:

Зафиксируем произвольную плоскую укладку трёхсвязного графа G.

Пусть C — цикл, *не* являющийся границей грани.

Тогда есть непустые множества рёбер внутри C и снаружи C.

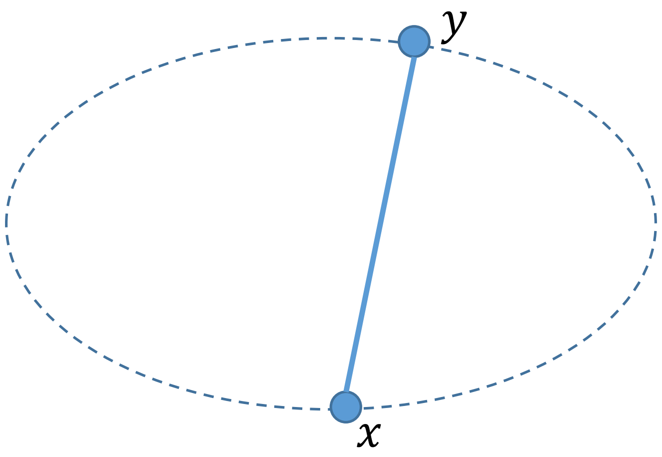
Получаем, что либо у C есть хорда, либо найдутся какие-то вершины u и v внутри и снаружи C соответственно.

Любой путь из u в v пересекает C, а значит граф $(G - C)$ не будет связным.

Укладки трёхсвязных графов

Пусть B — цикл, *являющийся* границей грани.
Можно считать, что B — граница *внешней* грани укладки G.

Если у B есть хорда xy, то граф $(G - \{x, y\})$ несвязен — противоречие с трёхсвязностью G:



Укладки трёхсвязных графов

Итак, у B нет хорд. Осталось доказать связность графа $(G - B)$.

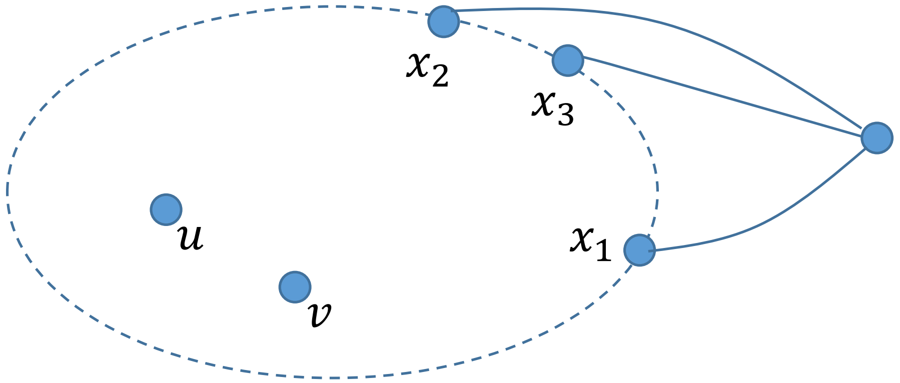
Допустим противное. Тогда существуют $u, v \in V(G - C)$, такие, что любой путь из u в v имеет с B общую вершину.

Так как G трёхсвязен, то найдутся пути P_1, P_2, P_3 между u и v без общих внутренних вершин. Пусть x_i — любая из общих вершин пути P_i и цикла B.

Укладки трёхсвязных графов

Получаем, что в G есть не пересекающиеся по внутренним вершинам пути из u, v в каждую из вершин x_1, x_2, x_3.

Возьмём точку вне B и соединим её с x_1, x_2, x_3:



Получили укладку графа, гомеоморфного $K_{3,3}$ — противоречие.
Теорема Татта доказана.

Теорема Татта «о резиновой укладке»

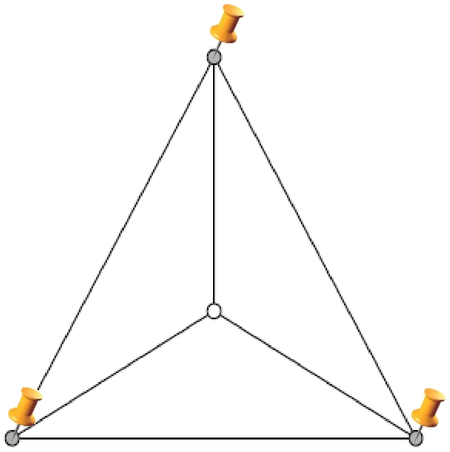
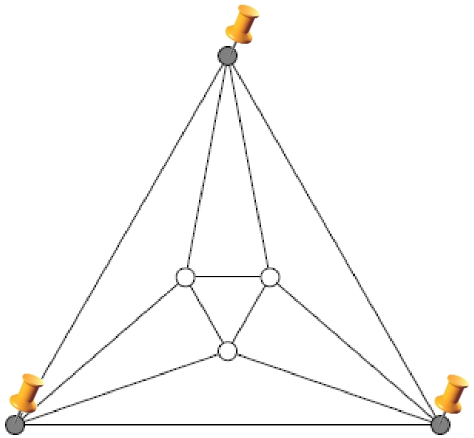
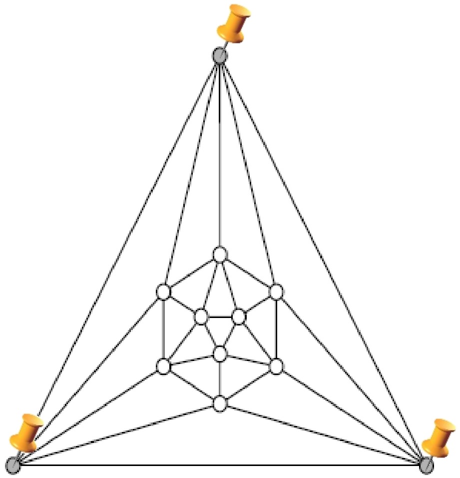
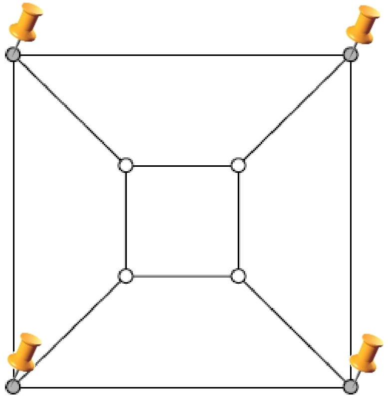
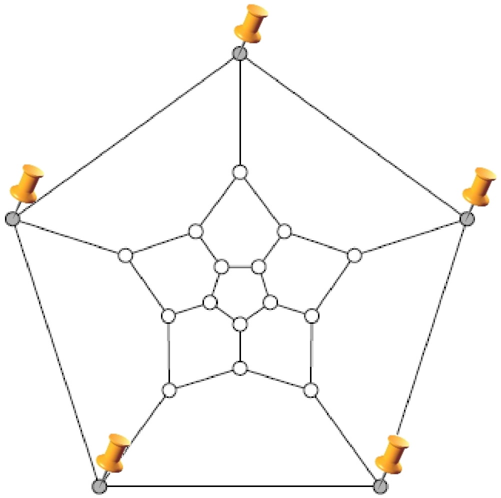
Теорема. (Tutte ’1963 — Tutte’s rubber band embedding)

Пусть Γ — множество вершин *трёхсвязного* планарного графа, составляющее границу одной из граней в какой-нибудь укладке.

Тогда укладку графа можно получить, если закрепить вершины Γ в вершинах произвольного выпуклого многоугольника, и представить, что рёбра графа стремятся стянуться, как резинки.

Полученная при стабилизации такой физической системы «картинка» и будет искомой укладкой.

Укладки графов платоновых тел, полученные методом Татта

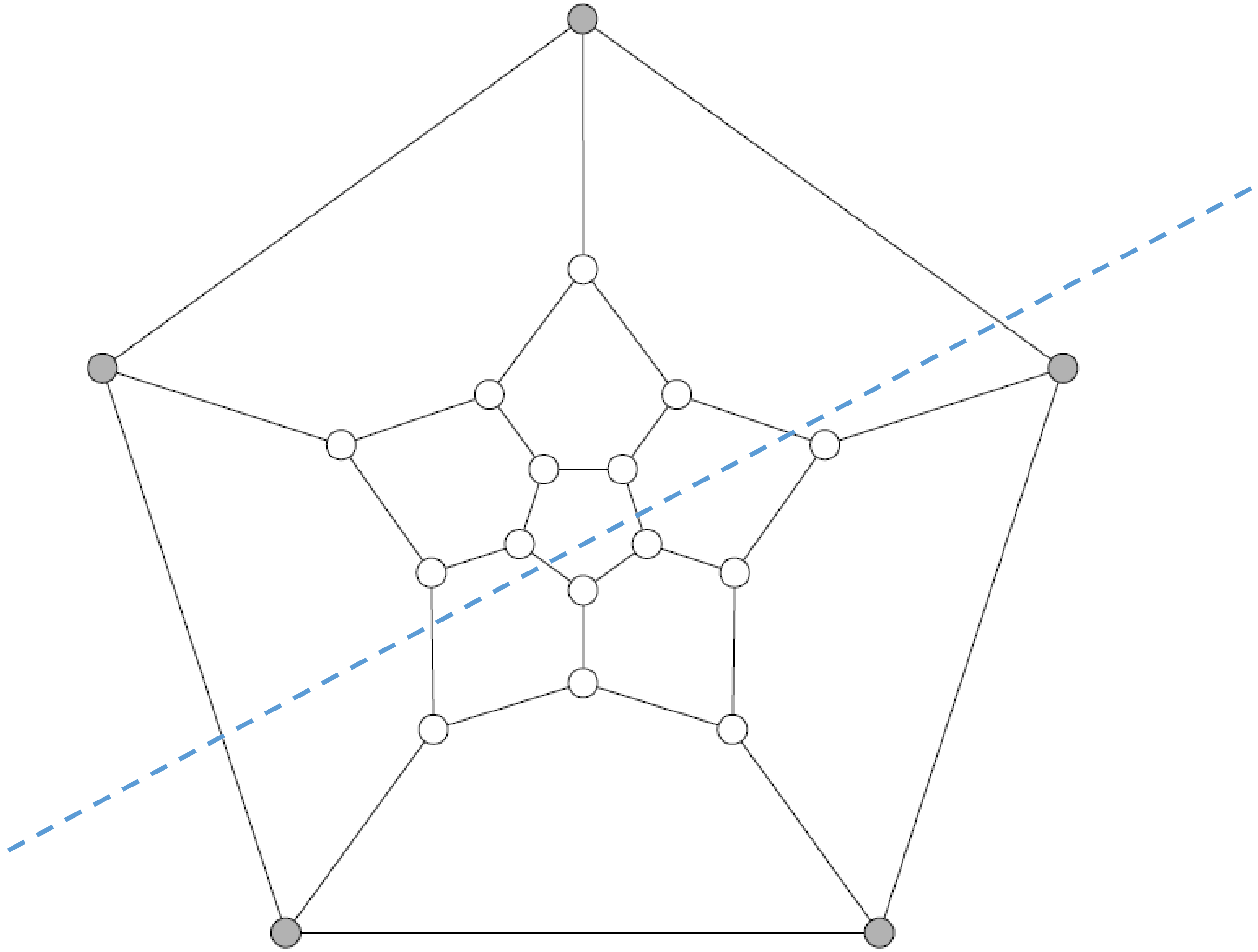






Факт 1: связность частей картинки, отсекаемых прямой

Факт 1:
Пусть l — произвольная прямая.
Пусть T — множество вершин G, лежащих в одной и той же открытой полуплоскости относительно l.

Тогда граф $G[T]$ связен.

Иллюстрация к доказательству Факта 1



Доказательство Факта 1

Пусть u, v — пара вершин G, попавших по одну сторону от l.

Пусть Γ' — вершины из Γ, лежащие в одной полуплоскости с u, v.

Достаточно доказать, что от u можно дойти до Γ', двигаясь только по вершинам по одну сторону от l.

Действительно, тогда окажется, что и для v так можно сделать. Поскольку Γ' связно (это цепь), то значит между u и v можно пройти, оставаясь по одну сторону от l.

Доказательство Факта 1

Б.о.о. считаем, что l не параллельна никакому ребру в укладке G.

Случай 0. Если $u \in \Gamma'$, то доказывать нечего.

Случай 1. Пусть $u \notin \Gamma$, и есть вершина $w \in N(u)$, т.ч. $x_w \neq x_u$.
Можно считать, что w в одной полуплоскости с u, но дальше от l.
Перейдём в w и продолжим по индукции.

Случай 2. Пусть $x_w = x_u$ для любого $w \in N(u)$. Положим

$$U \coloneqq \{u' \in V(G) \mid x_{u'} = x_u\}.$$

Пусть H — компонента графа $G[U]$, содержащая u.
Если $H \cap \Gamma' \neq \emptyset$, то всё получилось. Иначе, пусть u'' — одна из вершин, за которые H прицепляется к $(G - H)$. Тогда у u'' есть сосед, лежащий в одной полуплоскости с u'', но дальше от l.
Перейдём из u в него и продолжим по индукции.

Факт 2: отсутствие вырожденных вершин

Вершина *вырожденная*, если она и все её соседи попали на одну прямую.

Факт 2. В «резиновой» укладке вырожденных вершин нет.

Доказательство Факта 2

Пусть l — прямая, соответствующая одной из вырожденных вершин.

Пусть D — все вырожденные вершины, которым соответствует l.

Пусть H — компонента связности в $G[D]$.

Пусть V_1 и V_2 — вершины G по разные стороны от l. По Факту 1, $G[V_i]$ связен.

По трёхсвязности G, найдутся различные вершины $a, b, c \in (G - H)$,
у каждой из которых есть сосед в H.

По определению, a, b, c лежат на l, но имеют соседа вне l.

Тогда у каждой из вершин a, b, c есть сосед как в V_1, так и в V_2.

Стянем $G[V_1]$ к вершине v_1, $G[V_2]$ к v_2 и H к h.

Вершины a, b, c, v_1, v_2, h образовали $K_{3,3}$ — противоречие.

Факт 3: разделённость гранных множеств

Факт 3.

Пусть ab — ребро G, и F_1, F_2 — два «гранных» множества рёбер, содержащих ab, и пусть $F_1, F_2 \neq \Gamma$.

Пусть l — прямая, проходящая через x_a и x_b.

Тогда точки вершин F_1 и F_2 лежат по разные стороны от l.

Доказательство Факта 3

Допустим, что нашлись вершины $c \in F_1$ и $d \in F_2$, такие, что x_c и x_d попали по «правую» сторону от l либо на саму l.

Если $x_c \in l$, то у c есть сосед, попавший по «правую» сторону от l. (Аналогично для d.)

Согласно Факту 1, между c и d есть путь P_{cd}, все вершины которого лежат по правую сторону от l (кроме, быть может, самих c и d).

У a и b есть (по Факту 2) соседи по «левую» сторону от l.
Можно найти путь P_{ab} между a и b, все вершины которого лежат по левую сторону от l.

По построению, у путей P_{ab} и P_{cd} общих вершин не будет.

Доказательство Факта 3

Допустим, что нашлись вершины $c \in F_1 \setminus \{a, b\}$ и $d \in F_2 \setminus \{a, b\}$, такие, что x_c и x_d попали по «правую» сторону от l либо на саму l.

Нашлись пути P_{ab} и P_{cd} без общих вершин.

Рассмотрим любую плоскую укладку G.

В этой укладке путь P_{ab} и само ребро ab отделяют вершину c от d — это противоречит существованию пути P_{cd}.

«Гранные» множества переходят в выпуклые многоугольники

Факт 3. Если ab — общее ребро «гранных» множеств F_1, F_2, и $F_1, F_2 \neq \Gamma$, то точки вершин F_1 и F_2 лежат по разные стороны от прямой $x_a x_b$.

Из факта 3 следует, что любое «гранное» множество рёбер переходит в выпуклый многоугольник (т.к. всегда лежит по одну сторону от любого своего ребра).

У внутренностей многоугольников «гранных» множеств (кроме Γ) нет общих точек

Факт 3. Если ab — общее ребро «гранных» множеств F_1, F_2, и $F_1, F_2 \neq \Gamma$, то точки вершин F_1 и F_2 лежат по разные стороны от прямой $x_a x_b$.

Пусть x — произвольная точка внутри Γ.

Проведём через x прямую l, не проходящую через вершины G
и возможные точки пересечения рёбер.

Будем двигаться по l из бесконечности к x и считать, сколько многоугольников «гранных» множеств покрывают x.

Когда мы только заходим в Γ, такой многоугольник лишь один.

Когда мы пересекаем ребро, то уходим из одного многоугольника, входя тут же в другой; т.е., по-прежнему, мы лишь в одном многоугольнике.

Рёбра в «резиновой» укладке не пересекаются

«Гранные» множества переходят в выпуклые многоугольники.

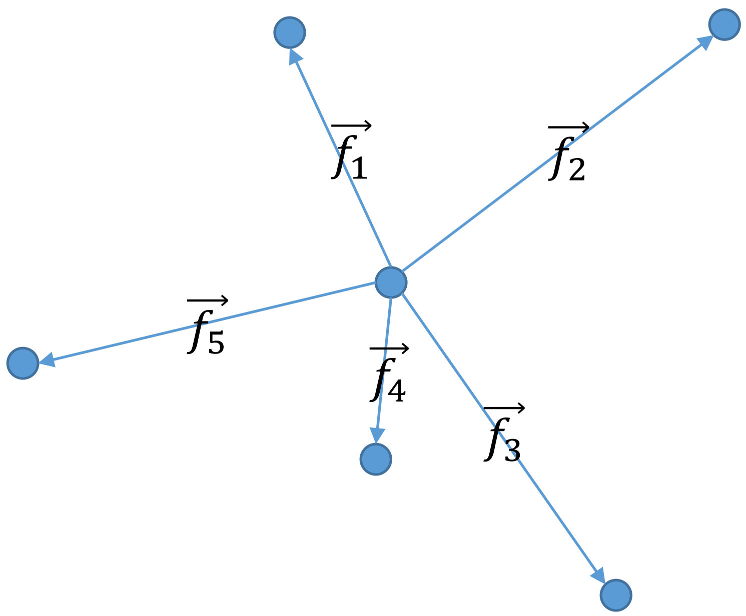
У внутренностей многоугольников «гранных» множеств (кроме Γ) нет общих точек.

Если бы у двух рёбер, не являющихся последовательными рёбрами одной грани, была общая точка, то нашлись бы два гранных множества, внутренности которых пересеклись — противоречие.

Теорема Татта доказана.

Существование «резиновой» укладки

Равновесие находим, исходя из законов Ньютона и Гука:



$$\sum_i \overrightarrow{f_i} = \mathbf{0}$$

Существование «резиновой» укладки

Пусть $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, и пусть координаты $v_1, \dots, v_p$ зафиксированы.
Пусть (x_i, y_i) — координаты вершины v_i.

Условие равновесия:

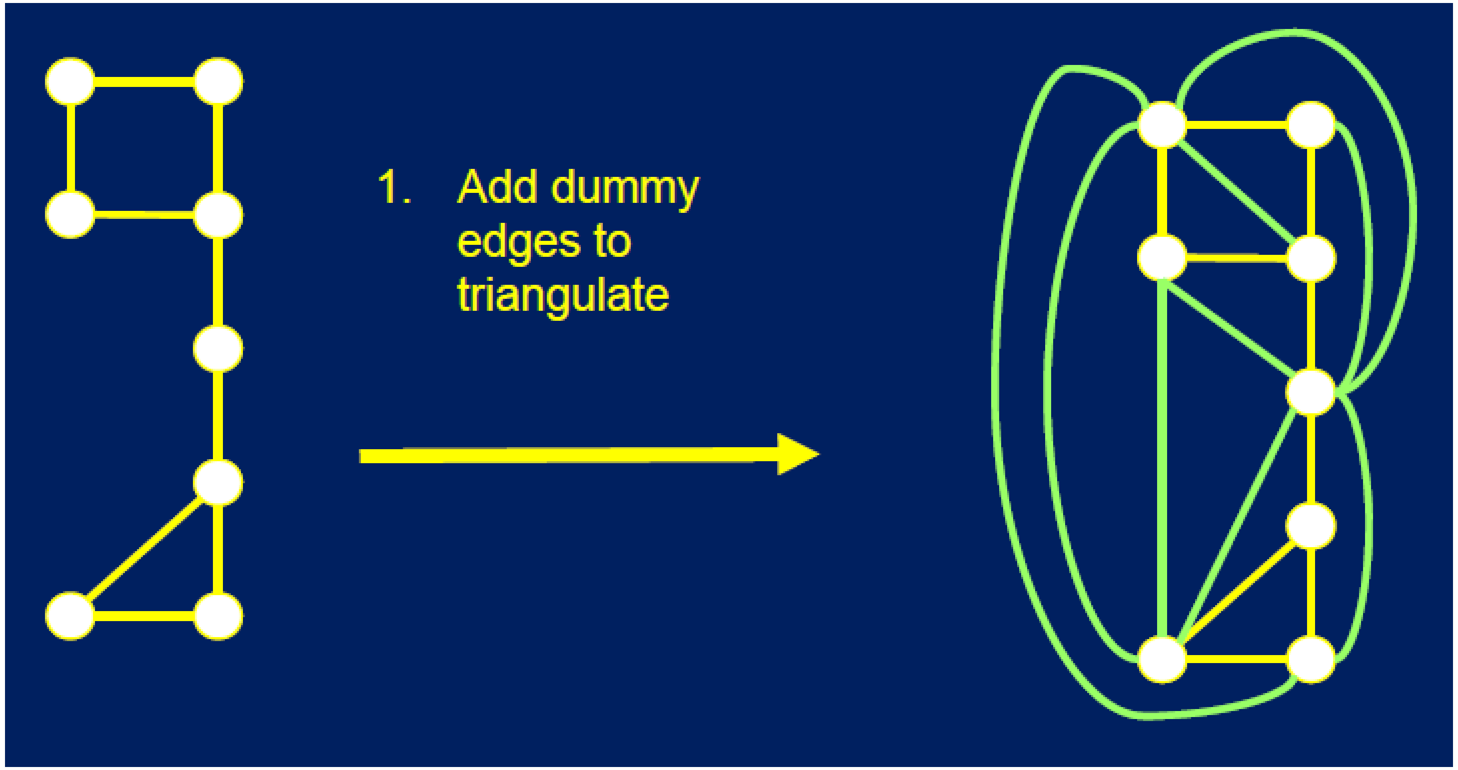
$$\forall i > p \qquad \sum_{v_i v_j \in E(G)} \left(x_j - x_i, y_j - y_i\right) = (0,0)$$

Вектор координат $\boldsymbol{x} = \left(x_{p+1}, \dots, x_n\right)$ удовлетворяет системе вида

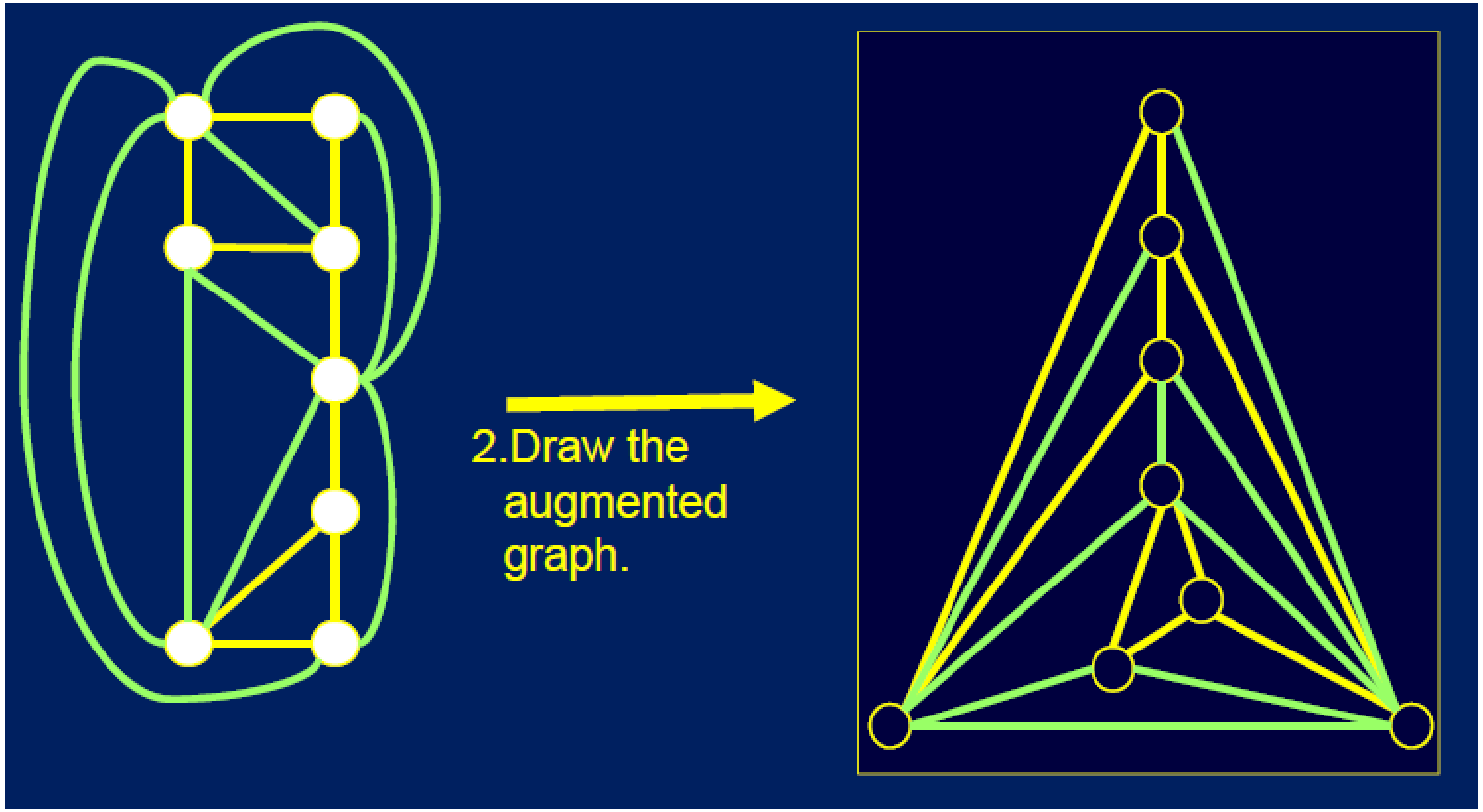
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

где $A = \{a_{ij}\}$, $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{если } i \neq j \text{ и } v_i v_j \notin E(G) \\ 1 & \text{если } v_i v_j \in E(G) \\ -\deg v_i & \text{если } i = j \end{cases}$

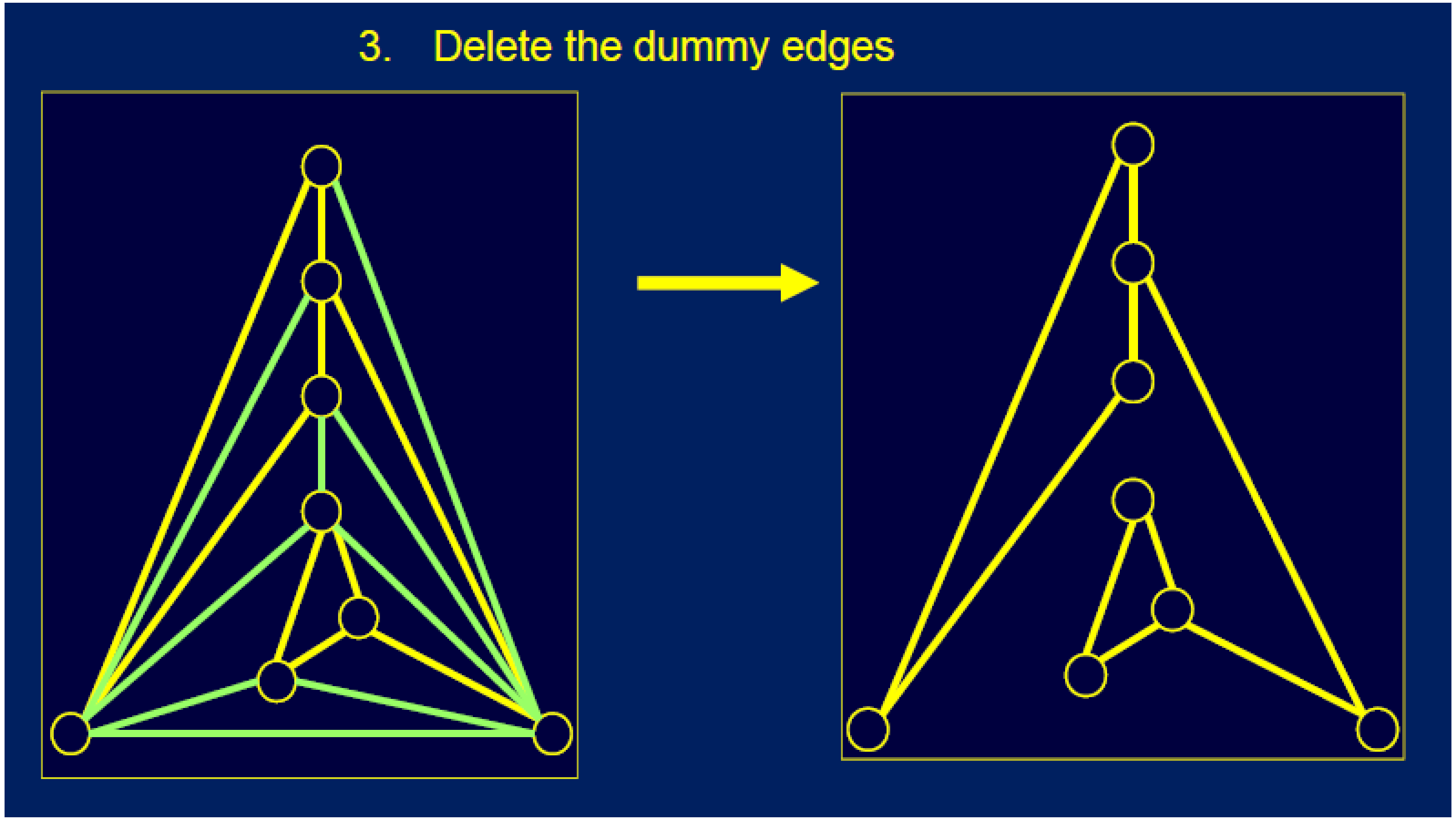
Что делать, если граф разрежен



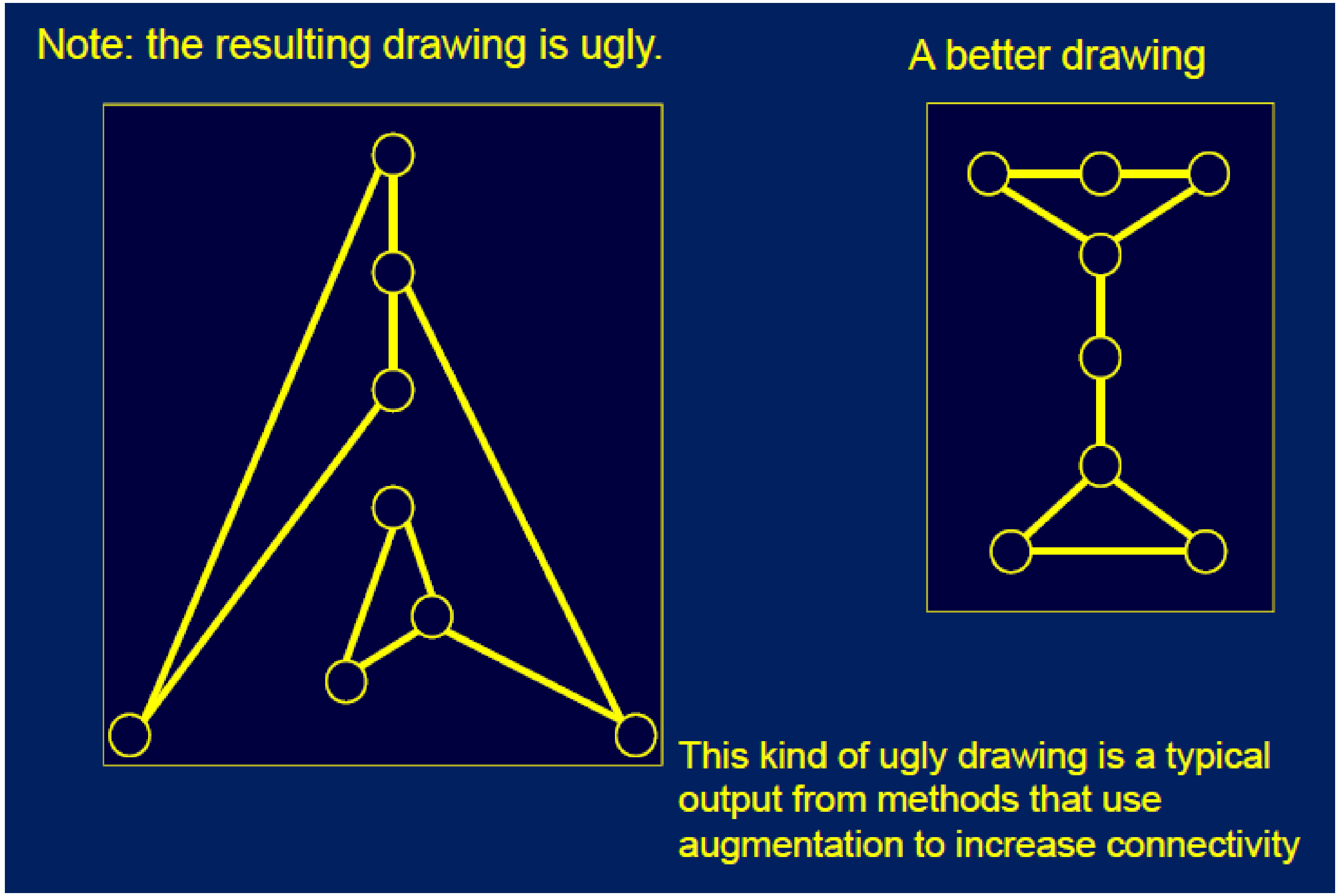
Что делать, если граф разрежен



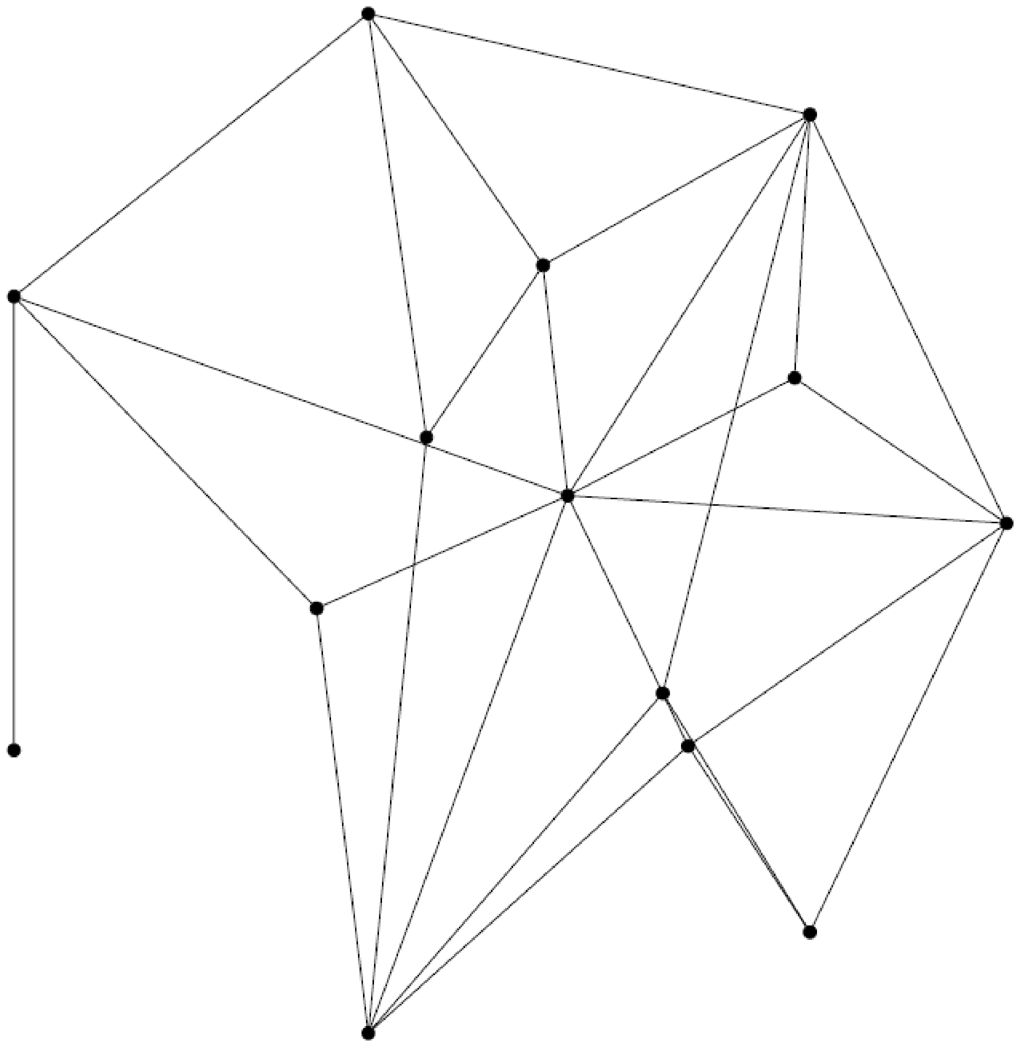
Что делать, если граф разрежен



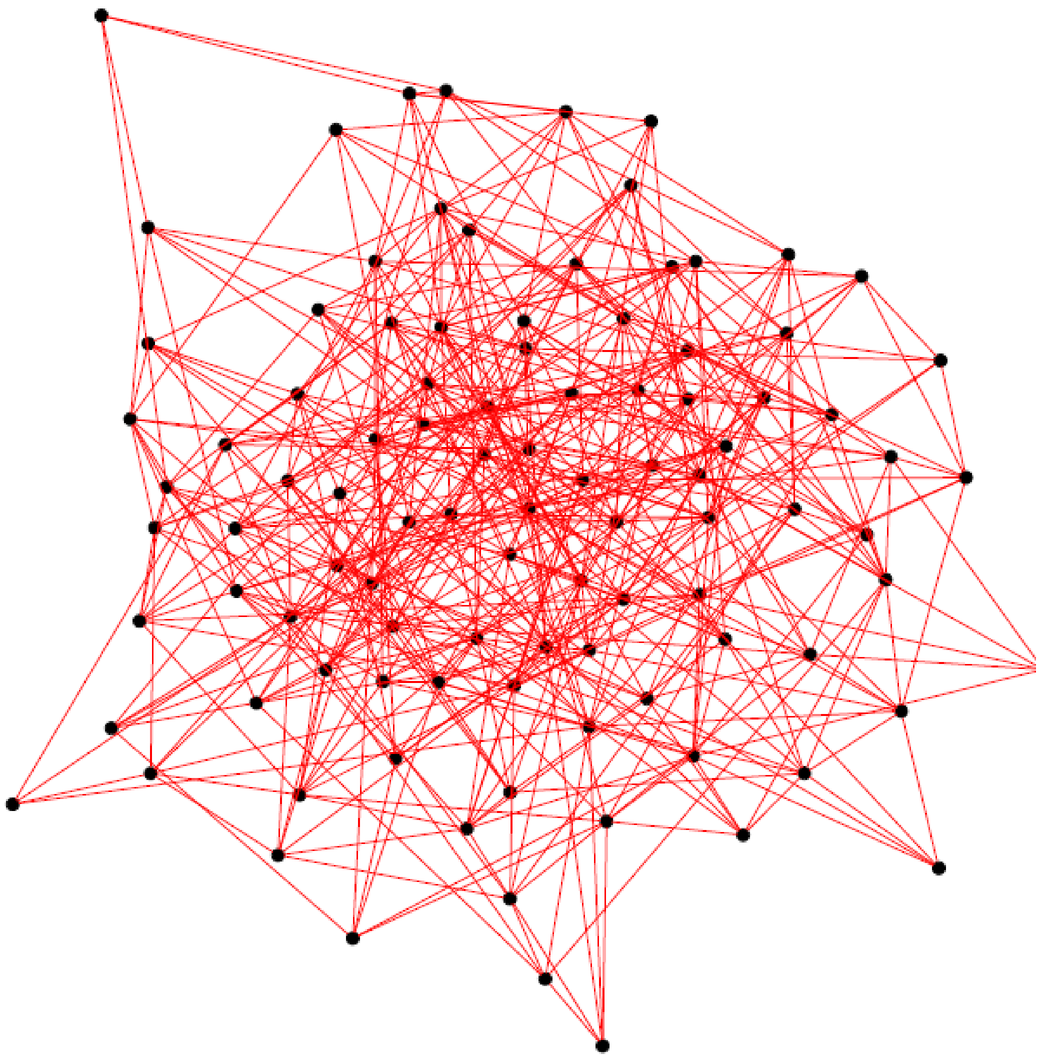
Что делать, если граф разрежен



Резиновая укладка непланарного графа



Резиновая укладка плотного графа



Метод Татта: плюсы и минусы

Плюсы:

- Достаточно быстрый
- Простая идея
- Математически обоснован
- Даёт симметричную укладку симметричных графов в случае трёхсвязности

Минусы:

- Плохое разрешение
- Требуется трёхсвязность (дополнение до плотных графов используется всего менее чем в 10% коммерческих пакетах)

Силовые методы укладки (force-directed)

Определяется система сил, действующих на укладку:

- Силы притяжения между вершинами
- Силы отталкивания между вершинами
- Силы, действующие на рёбра

Минимизируется «энергия» системы: стандартные численные методы, моделирование отжига и пр.

Силовые методы укладки

Плюсы:

- Прозрачная идея и, как правило, простая реализация
- Возможность применять к разреженным графам
- Возможность применять к непланарным графам
- Возможность учесть самые разные эстетические требования

Минусы:

- Математически хорошо обоснован только метод Татта и очень похожие
- Невысокая скорость при сложной функции энергии