Что можно делать с вещественными числами и нельзя делать с целыми числами

Ю. В. Матиясевич

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН

http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat

Что можно делать с вещественными числами и нельзя делать с целыми числами

Ю. В. Матиясевич

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН

http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat

Что можно делать с вещественными числами и нельзя делать с целыми числами

Часть 2. Десятая проблема Гильберта

Ю. В. Матиясевич

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН

http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat

Давид Гильберт, *“Математические проблемы”*, [1900]

Давид Гильберт, *“Математические проблемы”*, [1900]

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung. Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlkoefficienten sei vorgelegt: *man soll ein Verfahren angeben, nach welchen sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist*.

Давид Гильберт, *“Математические проблемы”*, [1900]

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung. Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlkoefficienten sei vorgelegt: *man soll ein Verfahren angeben, nach welchen sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist*.

10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения. Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами; *требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет*.

Диофантовы уравнения

Определение. Диофантово уравнение имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофантовы уравнения

Определение. Диофантово уравнение имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

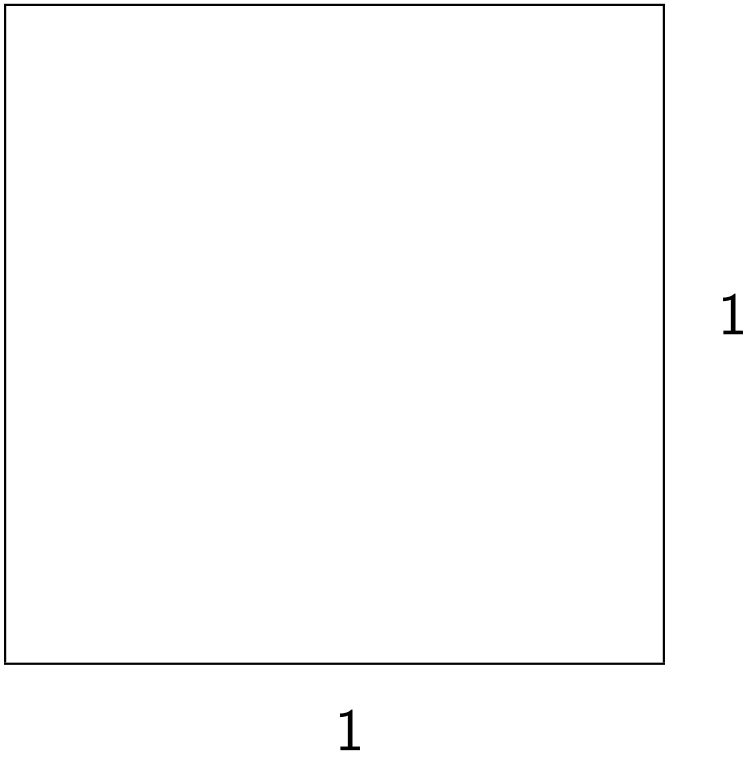
Греческий математик *Диофант* жил, скорее всего, в 3-ем веке нашей эры.

Полиномиальные уравнения у древних греков

$$x^2 = 2$$

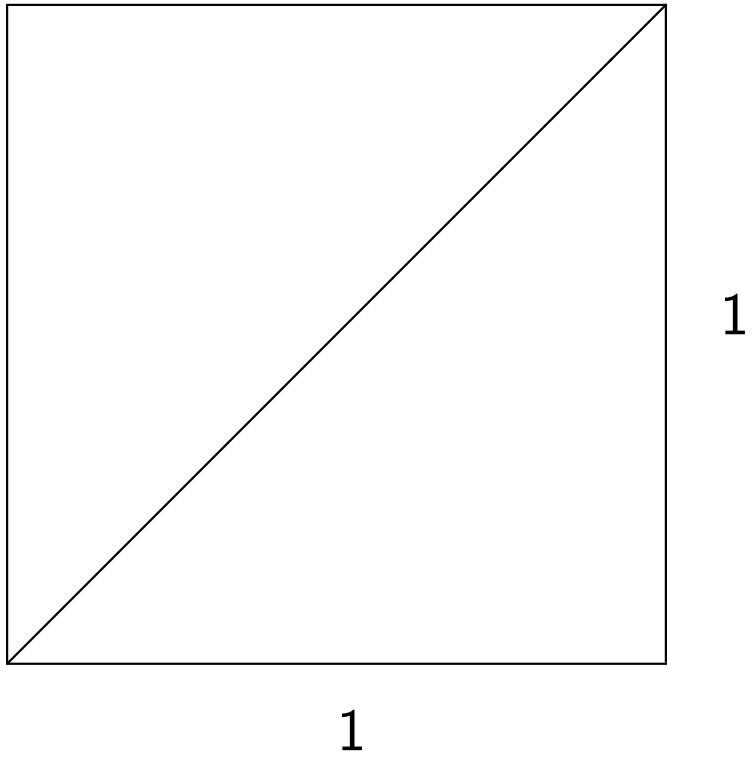
Полиномиальные уравнения у древних греков

$$x^2 = 2$$



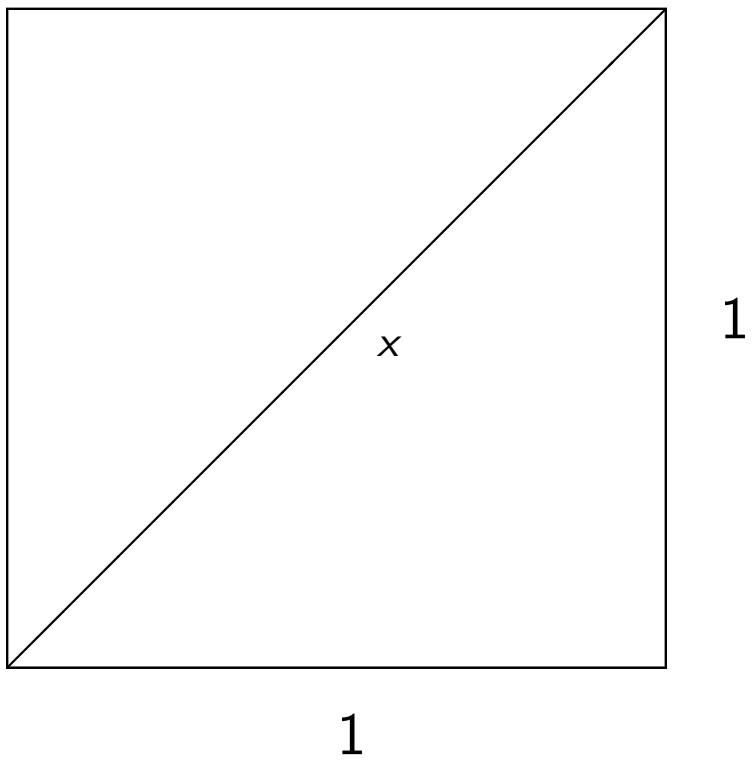
Полиномиальные уравнения у древних греков

$$x^2 = 2$$



Полиномиальные уравнения у древних греков

$$x^2 = 2$$



Давид Гильберт, *“Математические проблемы”*, [1900]

10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения. Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами; *требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет.*

Давид Гильберт, *“Математические проблемы”*, [1900]

10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения. Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами; *требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет.*

Целые рациональные числа

Давид Гильберт, *“Математические проблемы”*, [1900]

10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения. Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами; *требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет.*

Целые рациональные числа – это числа 0, ± 1, ± 2, ± 3, $\ldots$

Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофант искал решения в (положительных) рациональных числах

Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофант искал решения в (положительных) рациональных числах

Гильберт спрашивал про решение диофантовых уравнений в целых числах

Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофант искал решения в (положительных) рациональных числах

Гильберт спрашивал про решение диофантовых уравнений в целых числах

Можно также ограничиться только решениями в положительных целых числах или только в неотрицательных целых числах

Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофант искал решения в (положительных) рациональных числах

Гильберт спрашивал про решение диофантовых уравнений в целых числах

Можно также ограничиться только решениями в положительных целых числах или только в неотрицательных целых числах

От Диофанта до Гильберта

Диофант жил – когда?

От Диофанта до Гильберта

Диофант жил, скорее всего, в 3-ем веке нашей эры.

От Диофанта до Гильберта

Диофант жил, скорее всего, в 3-ем веке нашей эры.

Гильберт сформулировал проблемы – когда?

От Диофанта до Гильберта

Диофант жил, скорее всего, в 3-ем веке нашей эры.

Гильберт сформулировал проблемы в 1900 году

Давид Гильберт, *“Математические проблемы”*, [1900]

Давид Гильберт, *“Математические проблемы”*, [1900]

10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения. Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами; *требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет.*

Массовые проблемы

В современной терминологии 10-я проблема Гильберта является массовой проблемой, то есть проблемой, состоящей из счетного числа вопросов, на каждый из которых требуется дать ответ ДА или НЕТ. Суть массовой проблемы состоит в требовании найти единый универсальный метод, который позволял бы ответить на любой из этих вопросов.

Массовые проблемы

В современной терминологии 10-я проблема Гильберта является массовой проблемой, то есть проблемой, состоящей из счетного числа вопросов, на каждый из которых требуется дать ответ ДА или НЕТ. Суть массовой проблемы состоит в требовании найти единый универсальный метод, который позволял бы ответить на любой из этих вопросов.

Среди двадцати трёх “Математических проблем” Гильберта 10-я является единственной массовой проблемой

Массовые проблемы

В современной терминологии 10-я проблема Гильберта является массовой проблемой, то есть проблемой, состоящей из счетного числа вопросов, на каждый из которых требуется дать ответ ДА или НЕТ. Суть массовой проблемы состоит в требовании найти единый универсальный метод, который позволял бы ответить на любой из этих вопросов.

Среди двадцати трёх “Математических проблем” Гильберта 10-я является единственной массовой проблемой и она может рассматриваться как проблема информатики.

Массовые проблемы

В современной терминологии 10-я проблема Гильберта является массовой проблемой, то есть проблемой, состоящей из счетного числа вопросов, на каждый из которых требуется дать ответ ДА или НЕТ. Суть массовой проблемы состоит в требовании найти единый универсальный метод, который позволял бы ответить на любой из этих вопросов.

Среди двадцати трёх “Математических проблем” Гильберта 10-я является единственной массовой проблемой и она может рассматриваться как проблема информатики.

Ответ

Сегодня мы знаем, что 10-я проблема Гильберта решения не имеет. Это означает, что она неразрешима как массовая проблема:

Ответ

Сегодня мы знаем, что 10-я проблема Гильберта решения не имеет. Это означает, что она неразрешима как массовая проблема:

Теорема (Неразрешимость 10-й проблемы Гильберта) *Не существует алгоритма, который по узнавал бы по произвольному диофантову уравнению, имеет ли оно решения*.

Ответ

Сегодня мы знаем, что 10-я проблема Гильберта решения не имеет. Это означает, что она неразрешима как массовая проблема:

Теорема (Неразрешимость 10-й проблемы Гильберта) *Не существует алгоритма, который по узнавал бы по произвольному диофантову уравнению, имеет ли оно решения*.

В этом смысле говорят об отрицательном решении 10-й проблемы Гильберта.

Давид Гильберт, *“Математические проблемы”*, [1900]

Давид Гильберт, *“Математические проблемы”*, [1900]

10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения. Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами; требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет.

Первая неразрешимая массовая проблема в чистой математике

А. А. Марков (сын)
1903–1979

Emil L. Post
1897–1954

Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. *Bulletin AMS*, **50**, 284–316 (1944); reprinted in: The Collected Works of E. L. Post, Davis, M. (ed), Birkhäuser, Boston, 1994.

Hilbert's 10th problem "begs for an unsolvability proof"

Emil L. Post
1897–1954

Хронология

Хронология

- Начало 50-х годов: гипотеза, которую выдвинул Martin Davis.

Хронология

- Начало 50-х годов: гипотеза, которую выдвинул Martin Davis.
- Начало 60-х годов: частичный прогресс, который достигли Martin Davis, Hilary Putnam и Julia Robinson.

Хронология

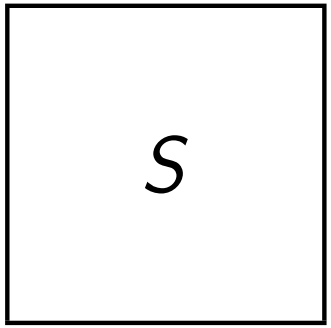
- Начало 50-х годов: гипотеза, которую выдвинул Martin Davis.
- Начало 60-х годов: частичный прогресс, который достигли Martin Davis, Hilary Putnam и Julia Robinson.
- 1970 год: последний шаг сделал Ю.Матиясевич.

An e-mail

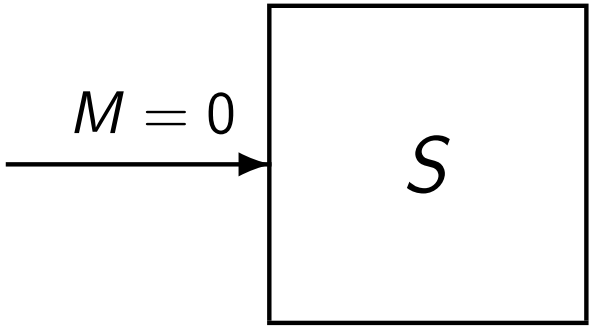
An e-mail

```
Dear Professor,

you are wrong.  I am a brilliant young programmer and
last night I wrote a sophisticated program in Java##.
My program solves Hilbert's tenth problem in the
__positive__ sense.  Namely, for every Diophantine
equation given as input, the program will print 1 or 0
depending on whether the equation has a solution or
not.

The attachment contains my ingenious program.  You can
run it on your favorite Diophantine equations and see
how fast my program works.

Have a fun, Professor!
```

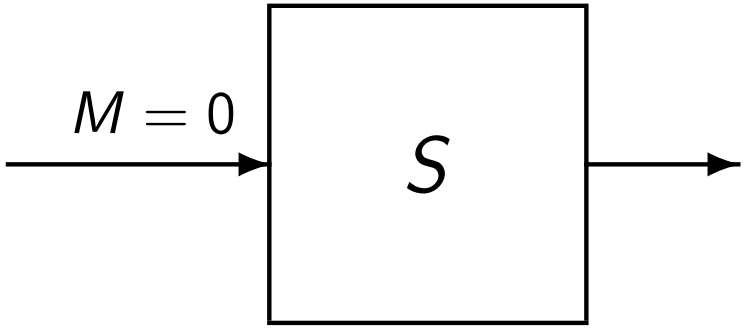
Точка зрения студента



Точка зрения студента



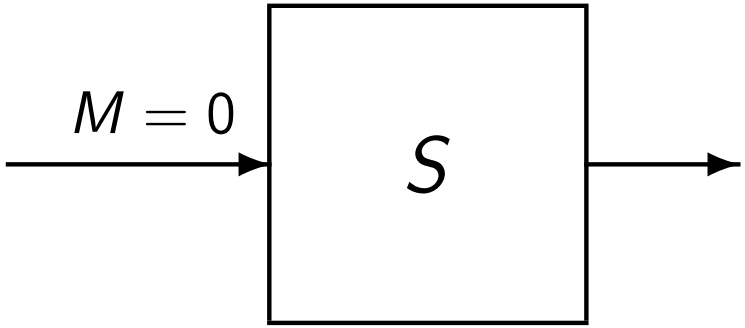
Точка зрения студента



$$\begin{cases} 1, & \text{если существует хотя бы одно решение} \\ 0, & \text{если решений вообще не существует} \end{cases}$$

Точка зрения студента

Для любого многочлена M:

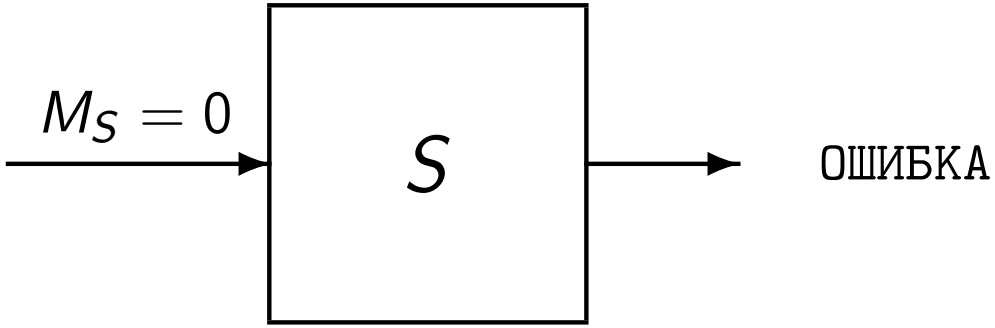


$$\begin{cases} 1, & \text{если существует хотя бы одно решение} \\ 0, & \text{если решений вообще не существует} \end{cases}$$

Точка зрения профессора:

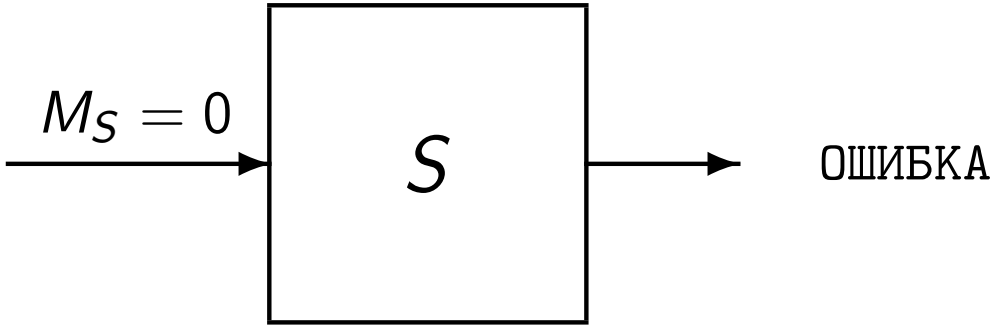
Точка зрения профессора:

Существует многочлен M_S такой, что



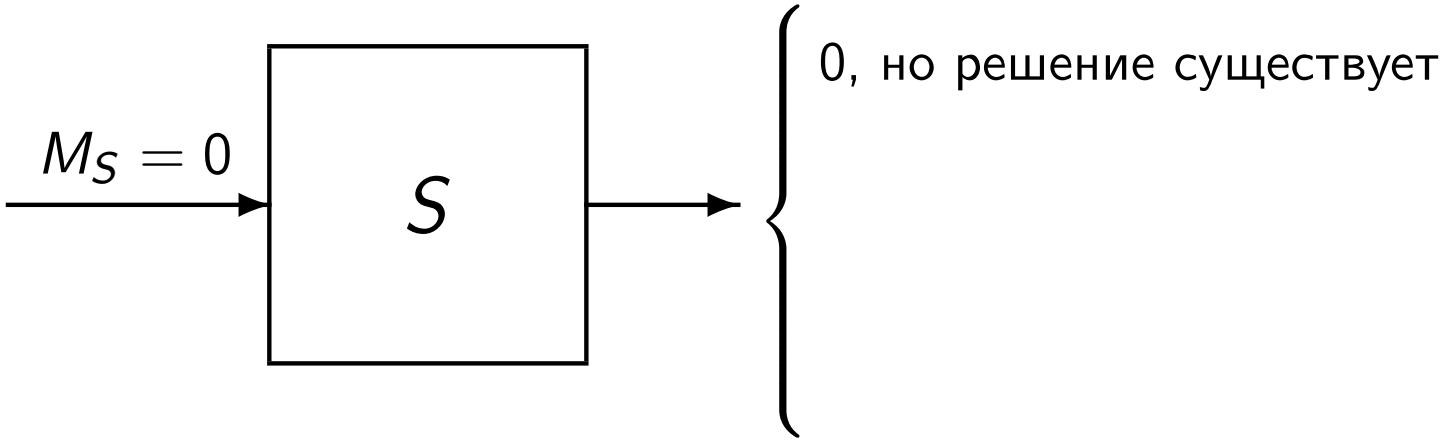
Точка зрения профессора:

Существует многочлен M_S такой, что



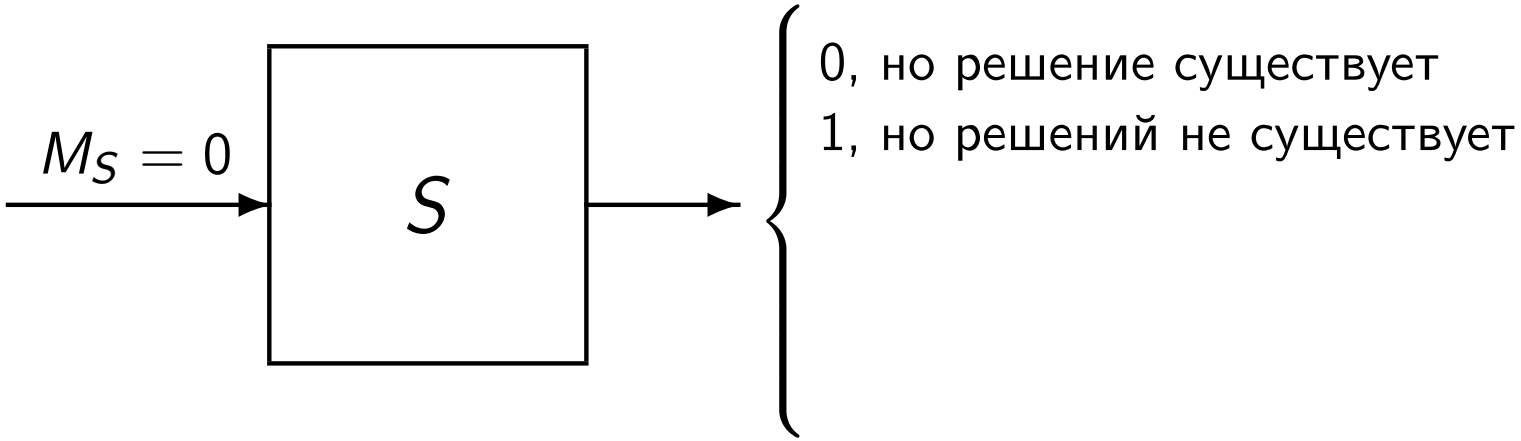
Точка зрения профессора:

Существует многочлен M_S такой, что



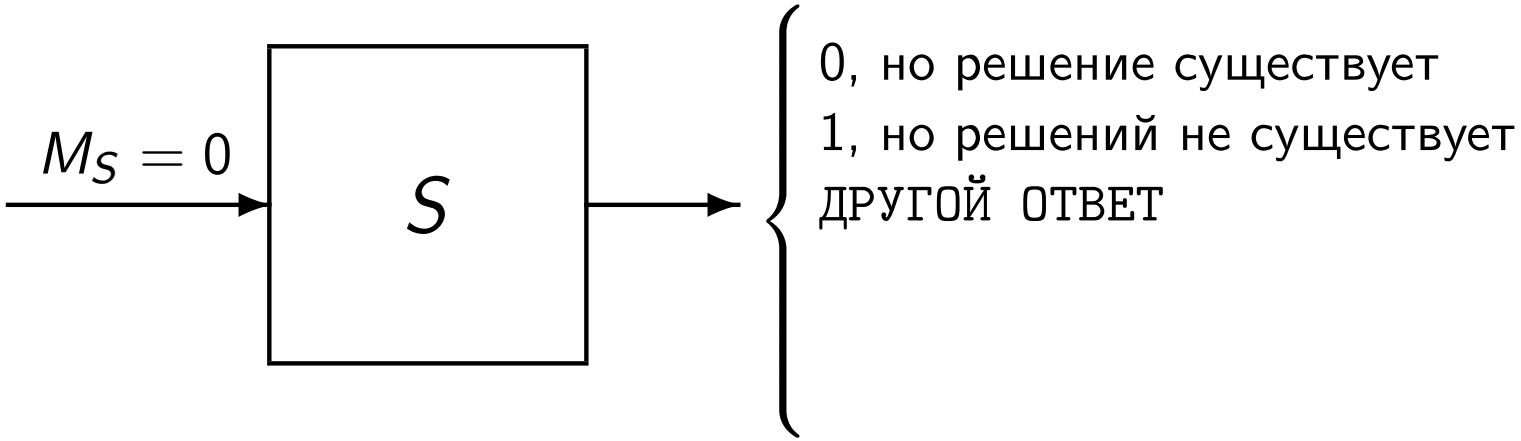
Точка зрения профессора:

Существует многочлен M_S такой, что



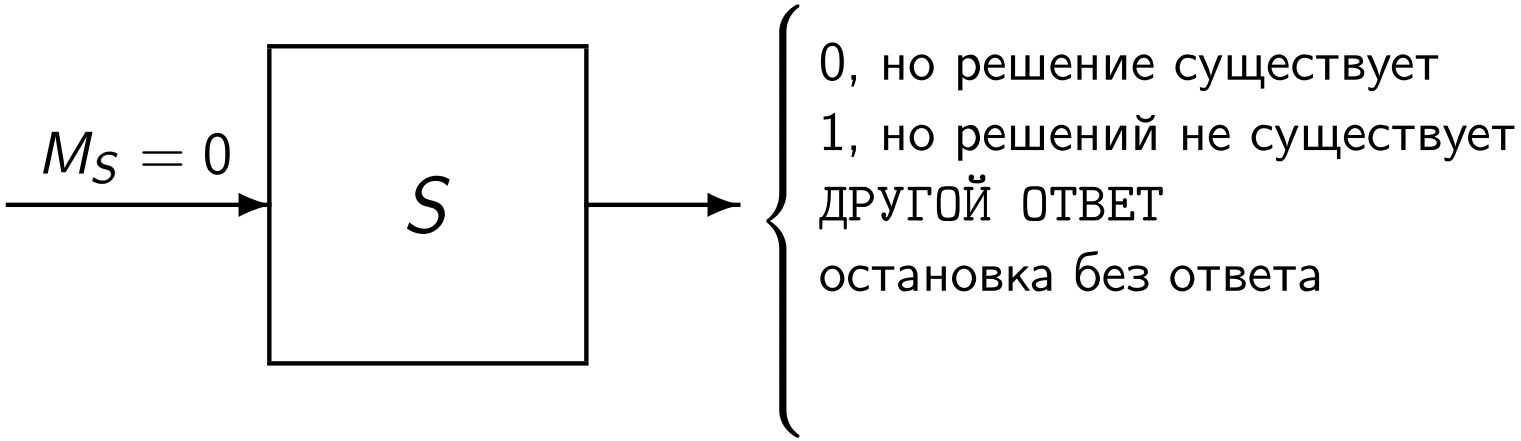
Точка зрения профессора:

Существует многочлен M_S такой, что



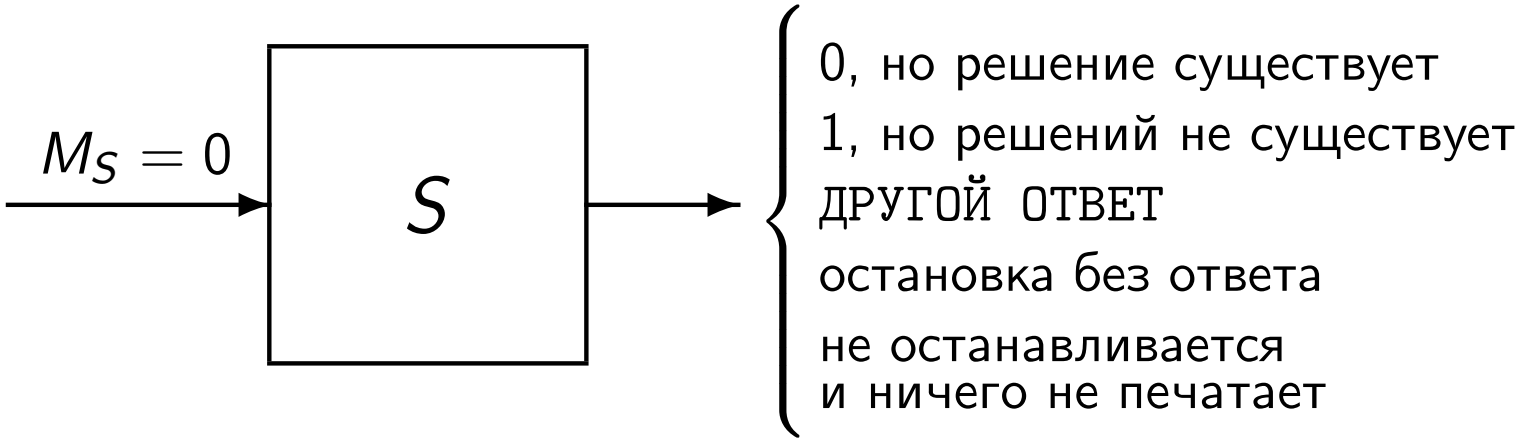
Точка зрения профессора:

Существует многочлен M_S такой, что



Точка зрения профессора:

Существует многочлен M_S такой, что

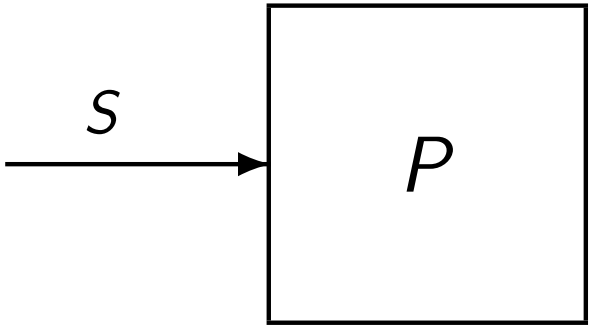


Программа профессора

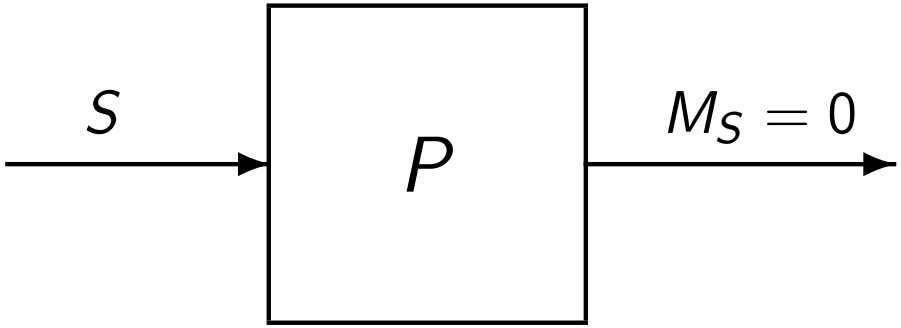
Программа профессора

P

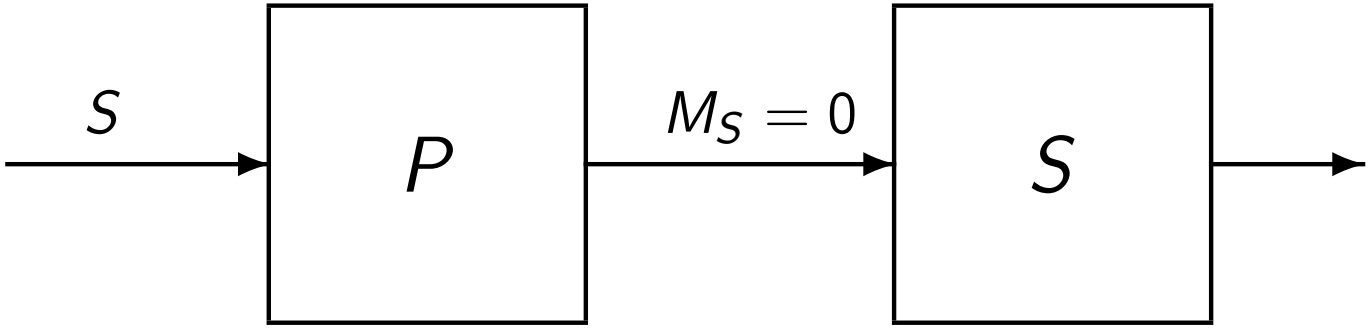
Программа профессора



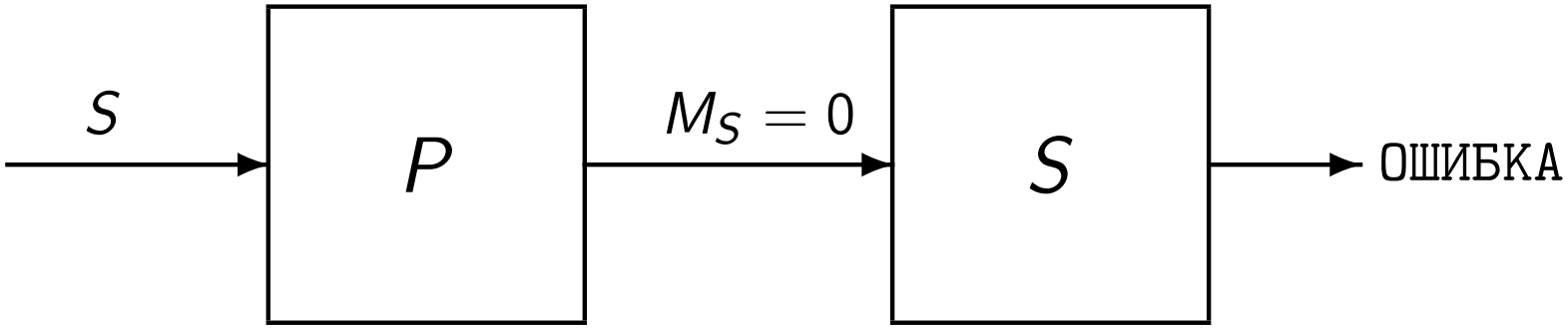
Программа профессора



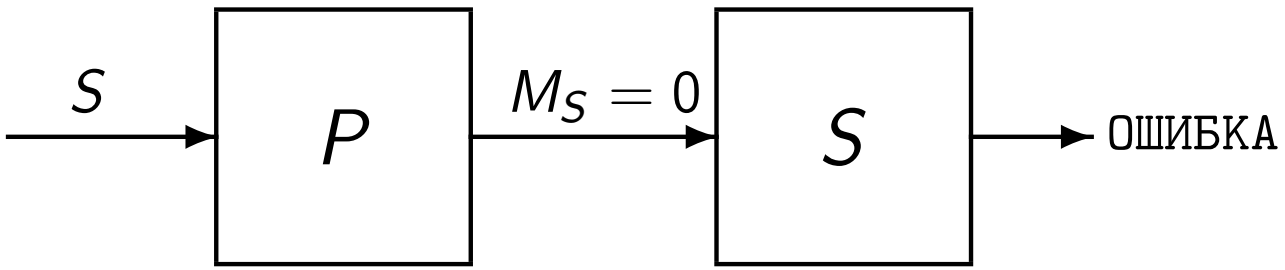
Программа профессора



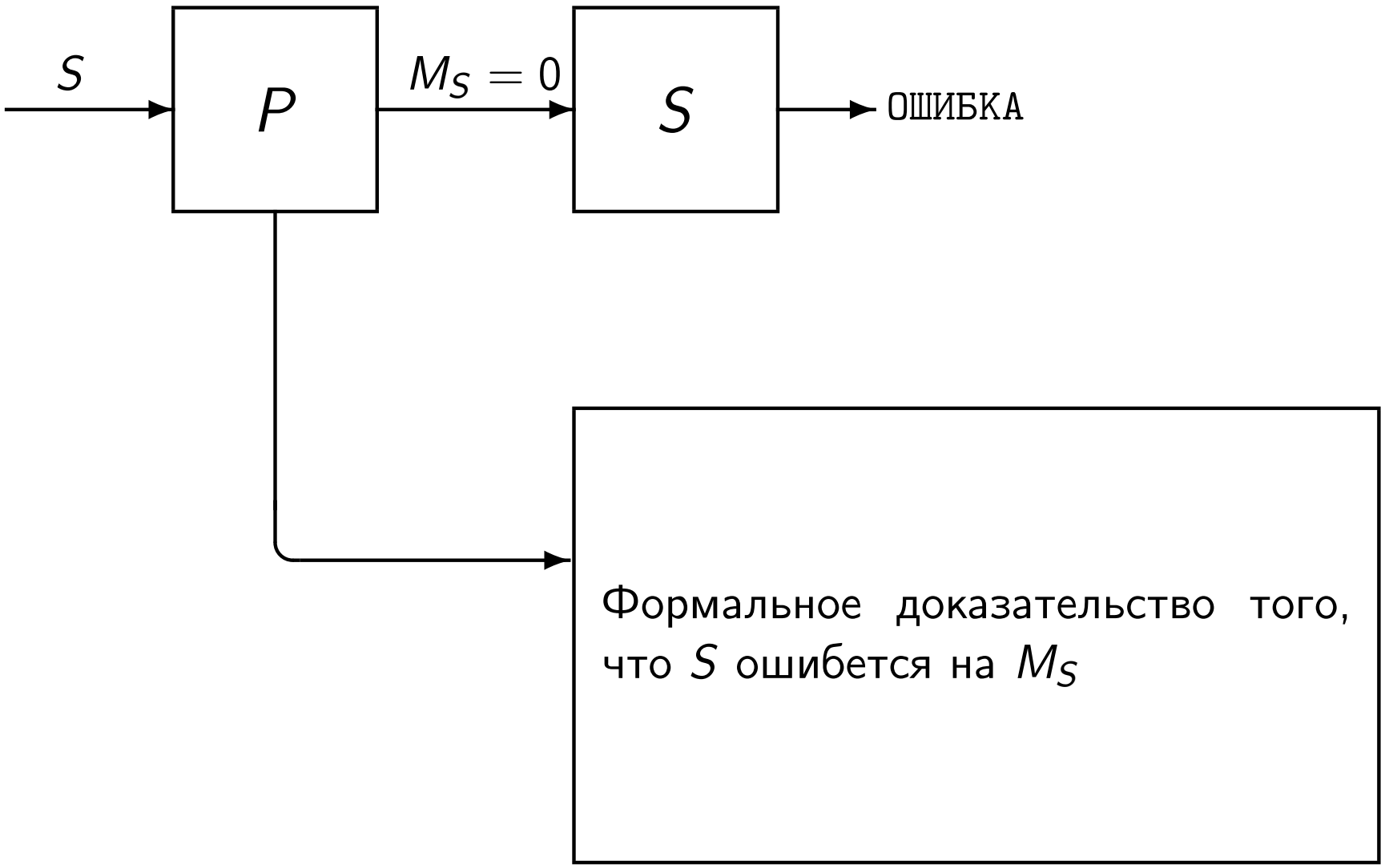
Программа профессора



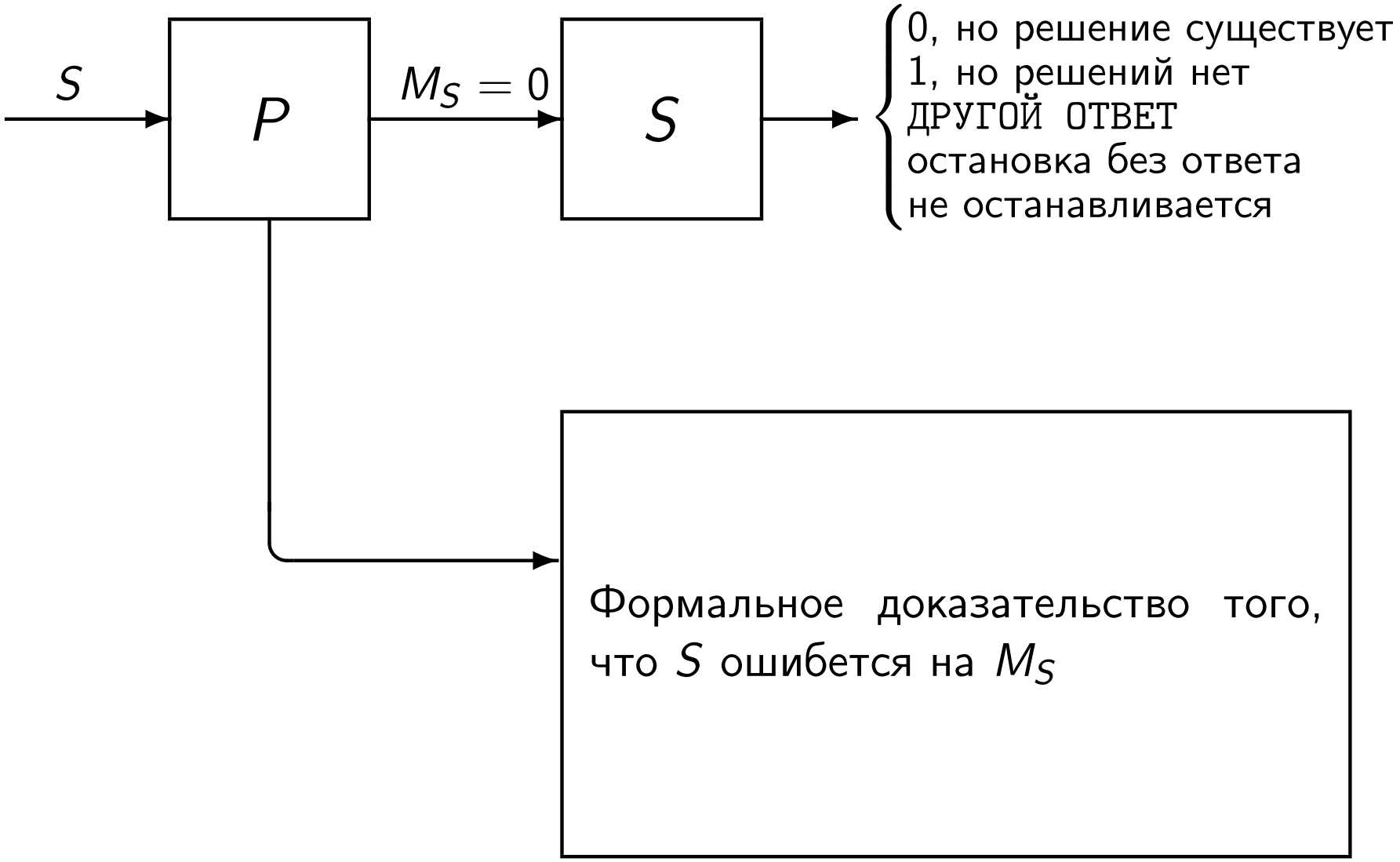
Усовершенствованная программа профессора



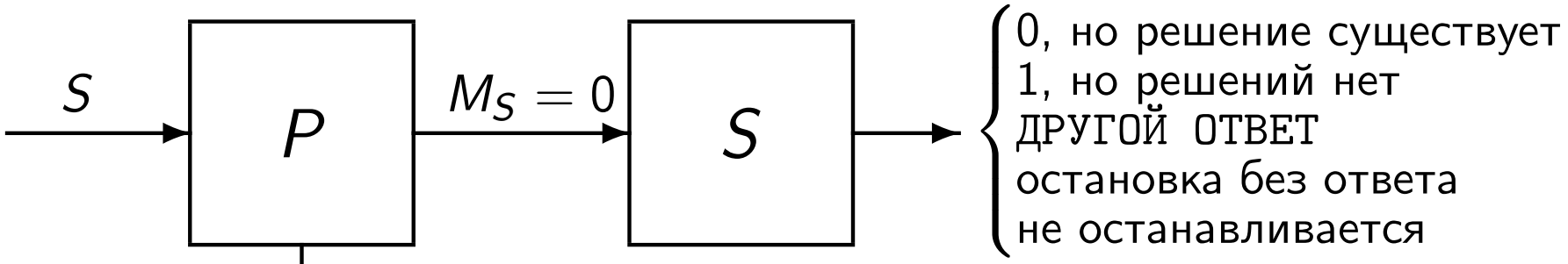
Усовершенствованная программа профессора



Усовершенствованная программа профессора



Усовершенствованная программа профессора



Доказательство того, что:

- *если S выдает 0, то уравнение $M_S = 0$ имеет решение*
- *если S выдает 1, то уравнение $M_S = 0$ решений не имеет*

Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофант искал решения в (положительных) рациональных числах

Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофант искал решения в (положительных) рациональных числах

Гильберт спрашивал про решение диофантовых уравнений в целых числах

Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофант искал решения в (положительных) рациональных числах

Гильберт спрашивал про решение диофантовых уравнений в целых числах

Можно также ограничиться только решениями в положительных целых числах или только в неотрицательных целых числах

Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофант искал решения в (положительных) рациональных числах

Гильберт спрашивал про решение диофантовых уравнений в целых числах

Можно также ограничиться только решениями в положительных целых числах или только в неотрицательных целых числах

Натуральные числа против целых

$$(x+1)^3 + (y+1)^3 = (z+1)^3$$

Натуральные числа против целых

$$(x+1)^3 + (y+1)^3 = (z+1)^3$$

Имеет ли это уравнение решение в целых числах?

Натуральные числа против целых

$$(x+1)^3 + (y+1)^3 = (z+1)^3$$

Имеет ли это уравнение решение в целых числах?

Да, и это тривиально: $y = -1, \quad z = x$.

Натуральные числа против целых

$$(x+1)^3 + (y+1)^3 = (z+1)^3$$

Имеет ли это уравнение решение в целых числах?

Да, и это тривиально: $y = -1, \quad z = x$.

Имеет ли это уравнение решение в неотрицательных целых числах?

Натуральные числа против целых

$$(x+1)^3 + (y+1)^3 = (z+1)^3$$

Имеет ли это уравнение решение в целых числах?
Да, и это тривиально: $y = -1, \quad z = x$.

Имеет ли это уравнение решение в неотрицательных целых числах?
Нет, не имеет, но это нетривиально (частный случай Великой теоремы Ферма).

От целых чисел к натуральным

Диофантово уравнение

$$P(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

имеет решение в целых числах $x_1, \ldots, x_m$ тогда и только тогда, когда диофантово уравнение

$$P(p_1 - q_1, \ldots, p_m - q_m) = 0.$$

имеет решение в натуральных числах $p_1, \ldots, p_m$, $q_1, \ldots, q_m$.

От целых чисел к натуральным

Диофантово уравнение

$$P(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

имеет решение в целых числах $x_1, \ldots, x_m$ тогда и только тогда, когда диофантово уравнение

$$P(p_1 - q_1, \ldots, p_m - q_m) = 0.$$

имеет решение в натуральных числах $p_1, \ldots, p_m$, $q_1, \ldots, q_m$.

Говорят, что массовая проблема распознавания разрешимости диофантовых уравнений в целых числах сводится к массовой проблеме распознавания разрешимости диофантовых уравнений в натуральных числах.

От натуральных чисел к целым

Диофантово уравнение

$$P(p_1, \ldots, p_m) = 0$$

имеет решение в натуральных числах тогда и только тогда, когда диофантово уравнение

$$P(w_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \ldots, w_m^2 + x_m^2 + y_m^2 + z_m^2) = 0.$$

имеет решение в целых числах.

От натуральных чисел к целым

Диофантово уравнение

$$P(p_1, \ldots, p_m) = 0$$

имеет решение в натуральных числах тогда и только тогда, когда диофантово уравнение

$$P(w_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \ldots, w_m^2 + x_m^2 + y_m^2 + z_m^2) = 0.$$

имеет решение в целых числах.

Теорема (Joseph-Louis Lagrange [1770], знал и Pierre Fermat, но не опубликовал) *Каждое натуральное число является суммой четырех квадратов*.

От натуральных чисел к целым

Диофантово уравнение

$$P(p_1, \ldots, p_m) = 0$$

имеет решение в натуральных числах тогда и только тогда, когда диофантово уравнение

$$P(w_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \ldots, w_m^2 + x_m^2 + y_m^2 + z_m^2) = 0.$$

имеет решение в целых числах.

Теорема (Joseph-Louis Lagrange [1770], знал и Pierre Fermat, но не опубликовал) *Каждое натуральное число является суммой четырех квадратов*.

Таким образом, массовая проблема распознавания разрешимости диофантовых уравнений в натуральных целых числах сводится к массовой проблеме распознавания разрешимости диофантовых уравнений в целых числах.

Натуральные числа против целых

У нас есть два сведéния:

- массовая проблема распознавания разрешимости диофантовых уравнений в целых числах сводится к массовой проблеме распознавания разрешимости диофантовых уравнений в натуральных числах.
- массовая проблема распознавания разрешимости диофантовых уравнений в натуральных целых числах сводится к массовой проблеме распознавания разрешимости диофантовых уравнений в целых числах.

Натуральные числа против целых

У нас есть два сведéния:

- массовая проблема распознавания разрешимости диофантовых уравнений в целых числах сводится к массовой проблеме распознавания разрешимости диофантовых уравнений в натуральных числах.
- массовая проблема распознавания разрешимости диофантовых уравнений в натуральных целых числах сводится к массовой проблеме распознавания разрешимости диофантовых уравнений в целых числах.

Таким образом, массовая проблема распознавания разрешимости диофантовых уравнений в целых числах эквивалентна массовой проблеме распознавания разрешимости диофантовых уравнений в натуральных числах.

Натуральные числа против целых

У нас есть два сведéния:

- массовая проблема распознавания разрешимости диофантовых уравнений в целых числах сводится к массовой проблеме распознавания разрешимости диофантовых уравнений в натуральных числах.
- массовая проблема распознавания разрешимости диофантовых уравнений в натуральных целых числах сводится к массовой проблеме распознавания разрешимости диофантовых уравнений в целых числах.

Таким образом, массовая проблема распознавания разрешимости диофантовых уравнений в целых числах эквивалентна массовой проблеме распознавания разрешимости диофантовых уравнений в натуральных числах.

Мы будем заниматься решением уравнений в натуральных числах $0, 1, 2, \ldots$

Давид Гильберт, *“Математические проблемы”*, [1900]

10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения. Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами; *требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет*.

Уравнения с параметрами

Семейство диофантовых уравнений имеет вид

$$M(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами, переменные которго разделены на две группы:

Уравнения с параметрами

Семейство диофантовых уравнений имеет вид

$$M(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами, переменные которго разделены на две группы:

- параметры $a_1, \ldots, a_n$;

Уравнения с параметрами

Семейство диофантовых уравнений имеет вид

$$M(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами, переменные которго разделены на две группы:

- параметры $a_1, \ldots, a_n$;
- неизвестные $x_1, \ldots, x_m$.

Уравнения с параметрами

Семейство диофантовых уравнений имеет вид

$$M(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами, переменные которго разделены на две группы:

- параметры $a_1, \ldots, a_n$;
- неизвестные $x_1, \ldots, x_m$.

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ такое, что

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m \{M(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0\}.$$

Уравнения с параметрами

Семейство диофантовых уравнений имеет вид

$$M(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами, переменные которго разделены на две группы:

- параметры $a_1, \ldots, a_n$;
- неизвестные $x_1, \ldots, x_m$.

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ такое, что

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m \{M(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0\}.$$

Множества, имеющие такие *представления* называются диофантовыми.

Примеры диофантовых множеств

Примеры диофантовых множеств

- Множество всех полных квадратов, представлено уравнением

Примеры диофантовых множеств

- Множество всех полных квадратов, представлено уравнением

$$a - x^2 = 0$$

Примеры диофантовых множеств

- Множество всех полных квадратов, представлено уравнением
$$a - x^2 = 0$$
- Множество всех составных чисел, представлено уравнением

Примеры диофантовых множеств

- Множество всех полных квадратов, представлено уравнением
$$a - x^2 = 0$$
- Множество всех составных чисел, представлено уравнением
$$a - (x_1 + 2)(x_2 + 2) = 0$$

Примеры диофантовых множеств

- Множество всех полных квадратов, представлено уравнением
$$a - x^2 = 0$$
- Множество всех составных чисел, представлено уравнением
$$a - (x_1 + 2)(x_2 + 2) = 0$$
- Множество всех *не*степеней числа 2, представлено уравнением

Примеры диофантовых множеств

- Множество всех полных квадратов, представлено уравнением
$$a - x^2 = 0$$
- Множество всех составных чисел, представлено уравнением
$$a - (x_1 + 2)(x_2 + 2) = 0$$
- Множество всех *не*степеней числа 2, представлено уравнением
$$a - (2x_1 + 3)x_2 = 0$$

Программа Диофанта

Программа Диофанта

$$\exists x_1 \dots x_m \{ P(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = 0$$

Программа Диофанта

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m \{ P(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0 \}$$

Программа Диофанта

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m \{ P(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0 \}$$

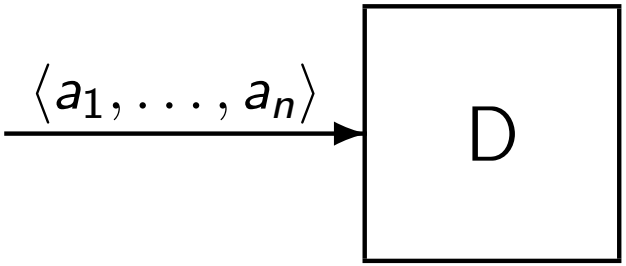
Программа Диофанта

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m \{ P(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0 \}$$

$$\boxed{\text{D}}$$

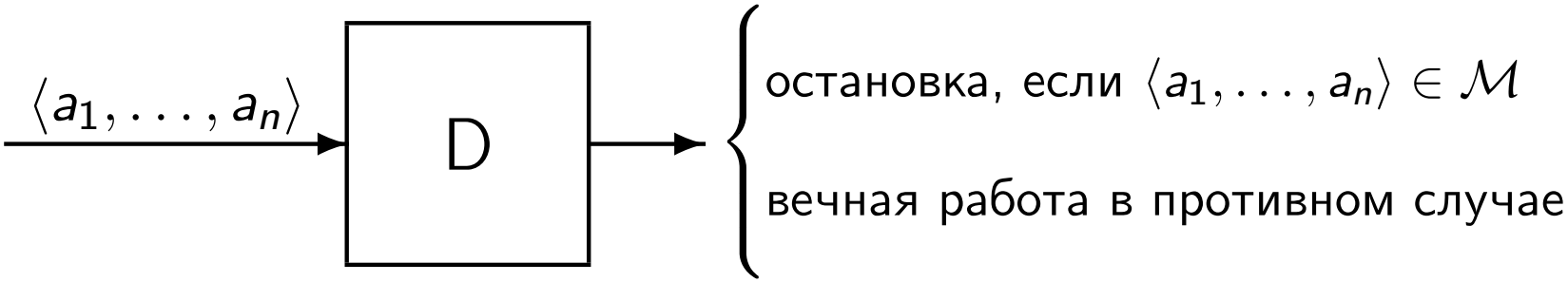
Программа Диофанта

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m \{ P(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0 \}$$



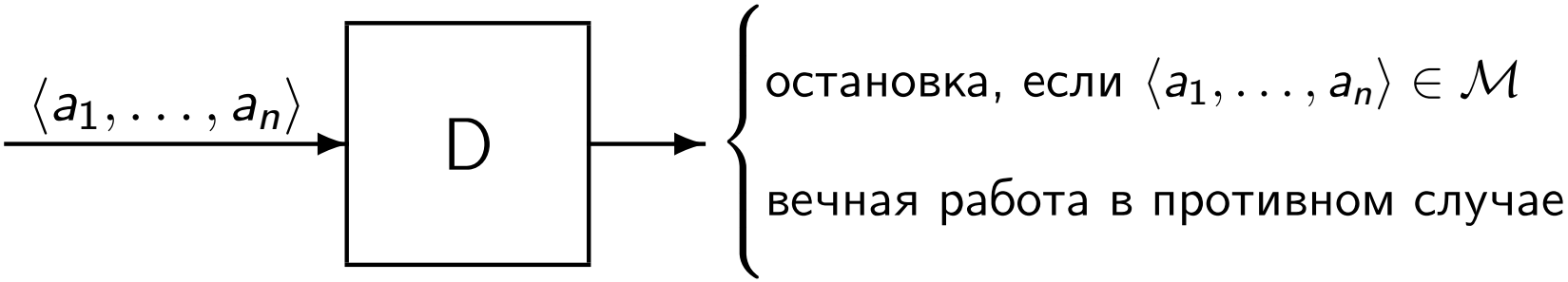
Программа Диофанта

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \iff \exists x_1 \ldots x_m \{ P(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0 \}$$



Программа Диофанта

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \iff \exists x_1 \ldots x_m \{ P(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0 \}$$




```
for (y=0;;y++)
  for (x1=0;x1<y;x1++)
   ........................
    for (xm=0;xm<y;xm++)
     if (P(a1,...,an,x1,...,xm)=0) STOP
```

Перечислимые множества

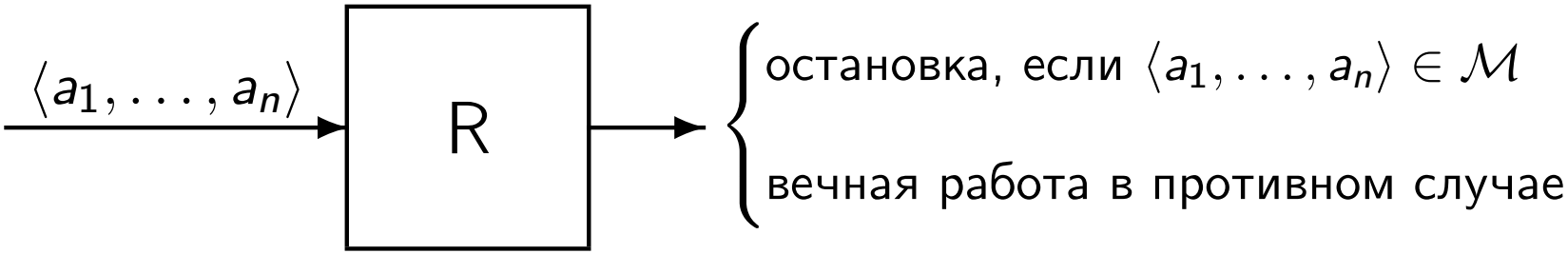
Перечислимые множества

Определение. Множество $\mathcal{M}$, состоящее из n-ок натуральных чисел называется перечислимым, если можно написать программу R, такую что

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \longrightarrow \boxed{\mathrm{R}} \longrightarrow \begin{cases} \text{остановка, если } \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \\ \text{вечная работа в противном случае} \end{cases}$$

Перечислимые множества

Определение. Множество $\mathcal{M}$, состоящее из n-ок натуральных чисел называется перечислимым, если можно написать программу R, такую что



Эквивалентное определение. Множество $\mathcal{M}$, состоящее из n-ок натуральных чисел называется перечислимым, если можно написать программу P которая (работая бесконечно долго) будет печатать только элементы множества $\mathcal{M}$ и напечатает каждое из них, быть может, много раз.

Вторая программа Диофанта

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m \{ P(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0 \}$$

Вторая программа Диофанта

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m \{P(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0\}$$

```
for (y=0;;y++)
  for (a1=0;a1<y;a1++)
   ......................
    for (an=0;an<y;an++)
     for (x1=0;x1<y;x1++)
      ......................
       for (xm=0;xm<y;xm++)
        if (P(a1,...,an,x1,...,xm)=0)
          print(a1,...,an)
```

Пример

$$P(a_1, x_1, x_2) = a_1 - (x_1 + 2)(x_2 + 2)$$

Пример

$$P(a_1, x_1, x_2) = a_1 - (x_1 + 2)(x_2 + 2)$$

```
for y do
  for a1 to y do
   for x1 to y do
    for x2 to y do
     if a1 - (x1 + 2)*(x2 + 2)=0 then
      print(a1) fi
od od od od
```

Пример

$$P(a_1, x_1, x_2) = a_1 - (x_1 + 2)(x_2 + 2)$$

```
for y do
  for a1 to y do
   for x1 to y do
    for x2 to y do
     if a1 - (x1 + 2)*(x2 + 2)=0 then
      print(a1) fi
od od od od
```

4, 4, 4, 6, 6, 4, 6, 6, 4, 6, 6, 8, 8, 4, 6, 6, 8, 8, 9, 4, 6, 6, 8, 8, 9, 10, 10, 4, 6, 6, 8, 8, 9, 10, 10, 4, 6, 6, 8, 8, 9, 10, 10, 12, 12, 12, 12, 4, 6, 6,. . .

Перечислимые множества

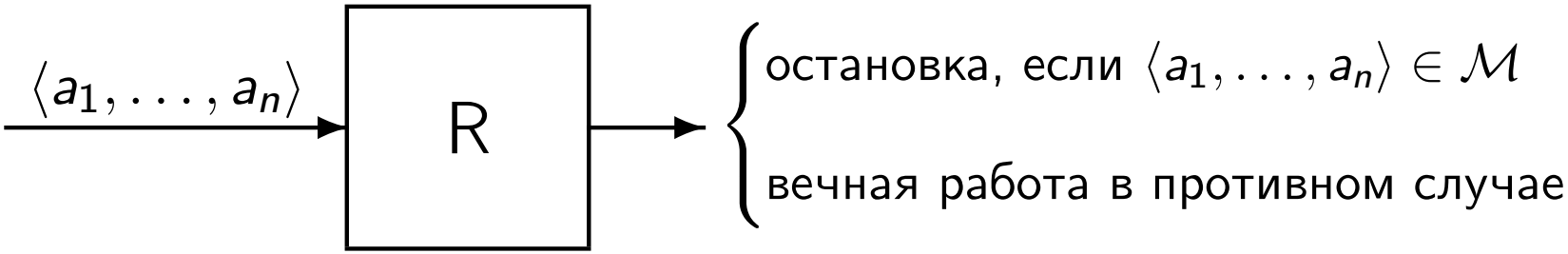
Перечислимые множества

Определение. Множество $\mathcal{M}$, состоящее из n-ок натуральных чисел называется перечислимым, если можно написать программу R, такую что

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \longrightarrow \boxed{\mathrm{R}} \longrightarrow \begin{cases} \text{остановка, если } \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \\ \text{вечная работа в противном случае} \end{cases}$$

Перечислимые множества

Определение. Множество $\mathcal{M}$, состоящее из n-ок натуральных чисел называется перечислимым, если можно написать программу R, такую что



Эквивалентное определение. Множество $\mathcal{M}$, состоящее из n-ок натуральных чисел называется перечислимым, если можно написать программу P которая (работая бесконечно долго) будет печатать только элементы множества $\mathcal{M}$ и напечатает каждое из них, быть может, много раз.

Гипотеза Martin'a Davis'a

Гипотеза Martin'a Davis'a

Тривиальный факт. *Каждое диофантово множество является перечислимым.*

Гипотеза Martin'a Davis'a

Тривиальный факт. *Каждое диофантово множество является перечислимым.*

Гипотеза M. Davis'a (начало 50-х). *Каждое перечислимое множество является диофантовым.*

Гипотеза Martin'a Davis'a

Тривиальный факт. *Каждое диофантово множество является перечислимым*.

Гипотеза M. Davis'a (начало 50-х). *Каждое перечислимое множество является диофантовым*.

Гипотеза M. Davis'a была доказана в 1970 году.

DPRM-теорема. Понятия *перечислимое множество* и *диофантово множество* совпадают.

Гипотеза Martin'a Davis'a

Тривиальный факт. *Каждое диофантово множество является перечислимым*.

Гипотеза M. Davis'a (начало 50-х). *Каждое перечислимое множество является диофантовым*.

Гипотеза M. Davis'a была доказана в 1970 году.

DPRM-теорема. Понятия *перечислимое множество* и *диофантово множество* совпадают.

Martin Davis, Hilary Putnam, Julia Robinson, Юрий Матиясевич

Перечисление диофантовых уравнений

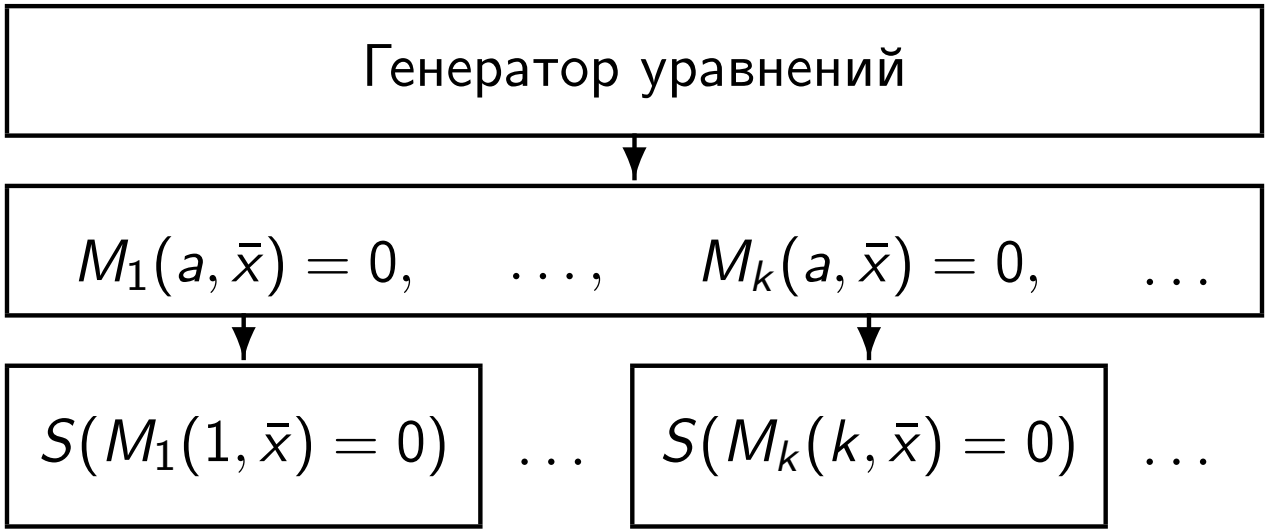
$$M_1(a, \bar{x}) = 0, \qquad \ldots, \qquad M_k(a, \bar{x}) = 0, \qquad \ldots$$

Программа профессора

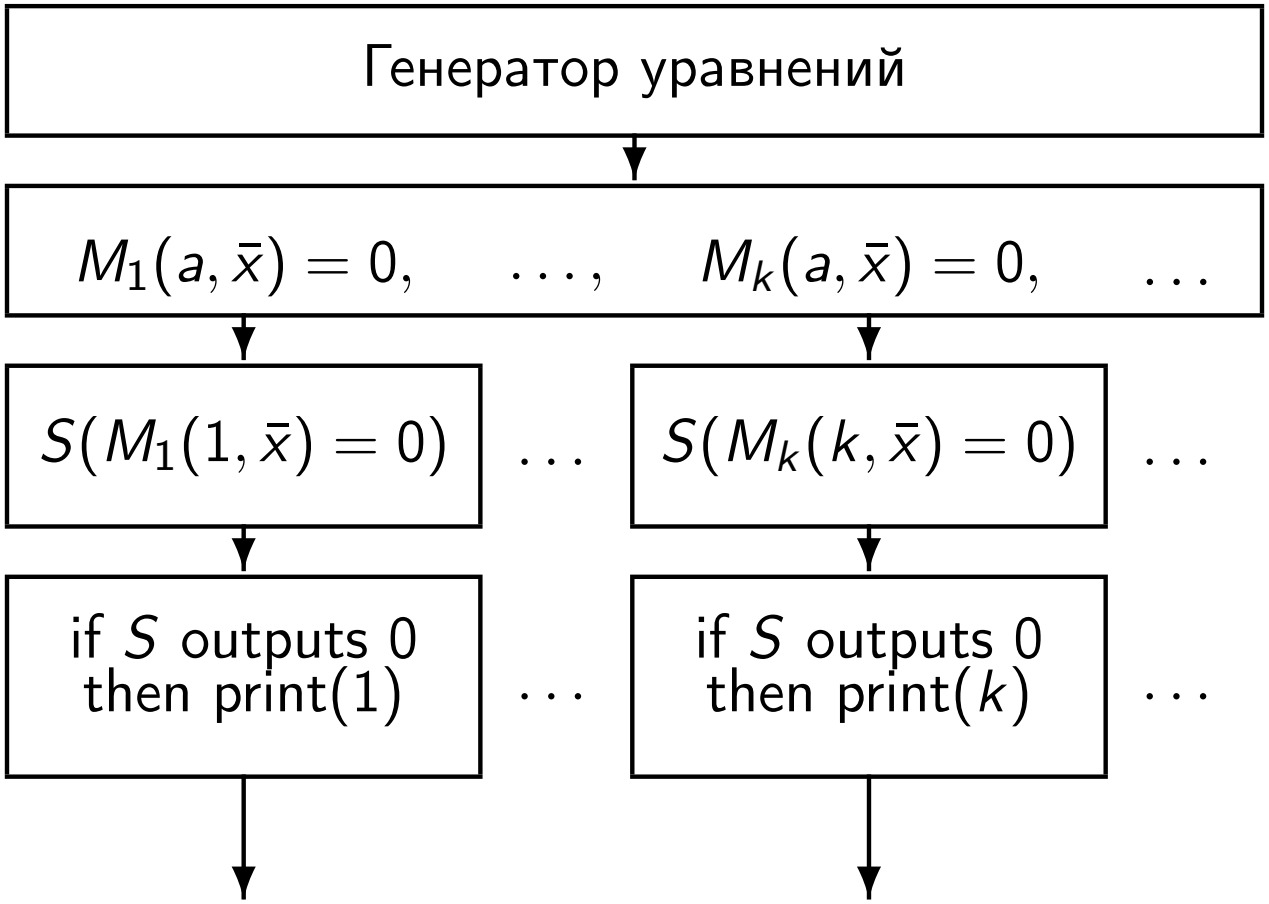
Генератор уравнений

$$M_1(a, \bar{x}) = 0, \quad \ldots, \quad M_k(a, \bar{x}) = 0, \quad \ldots$$

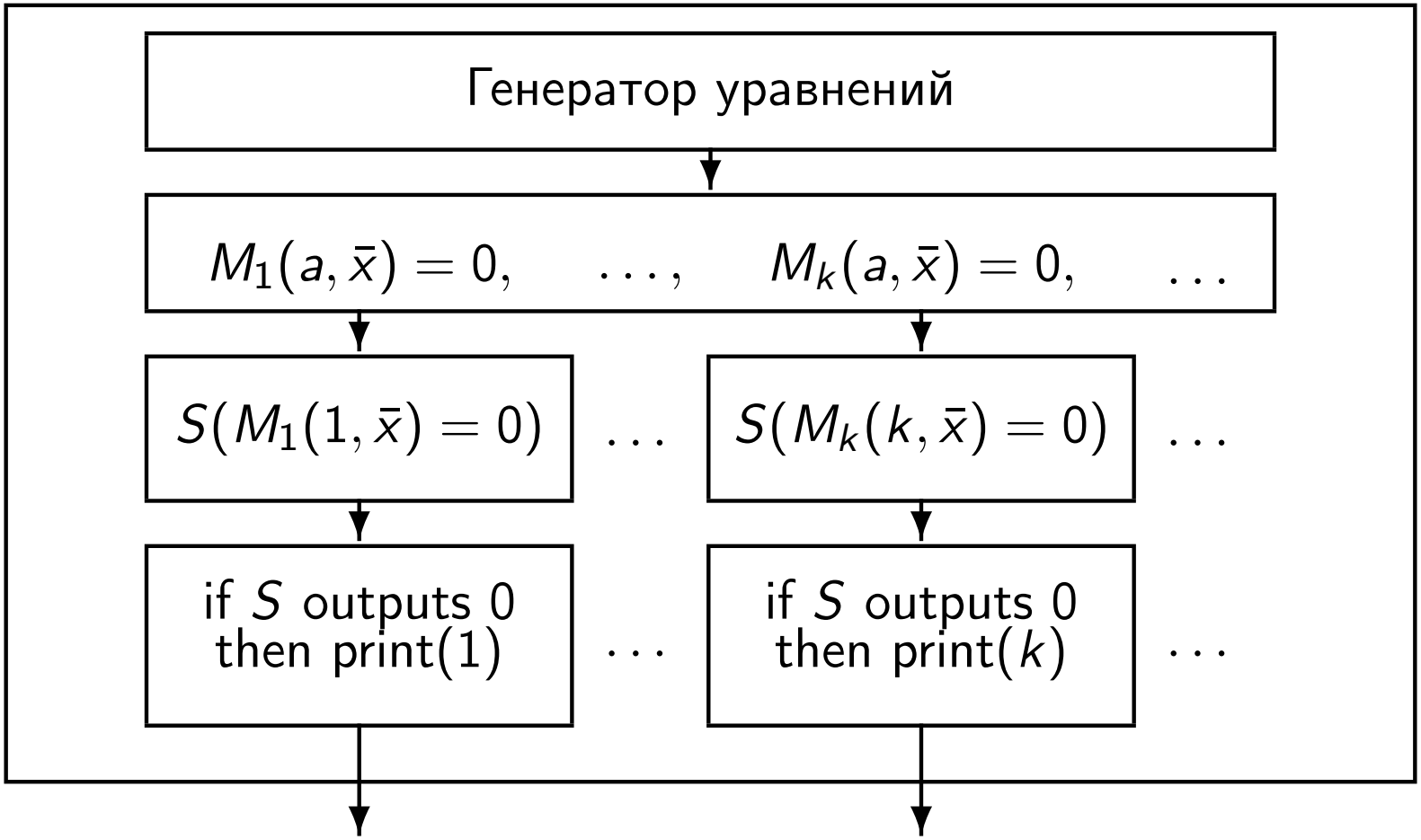
Программа профессора



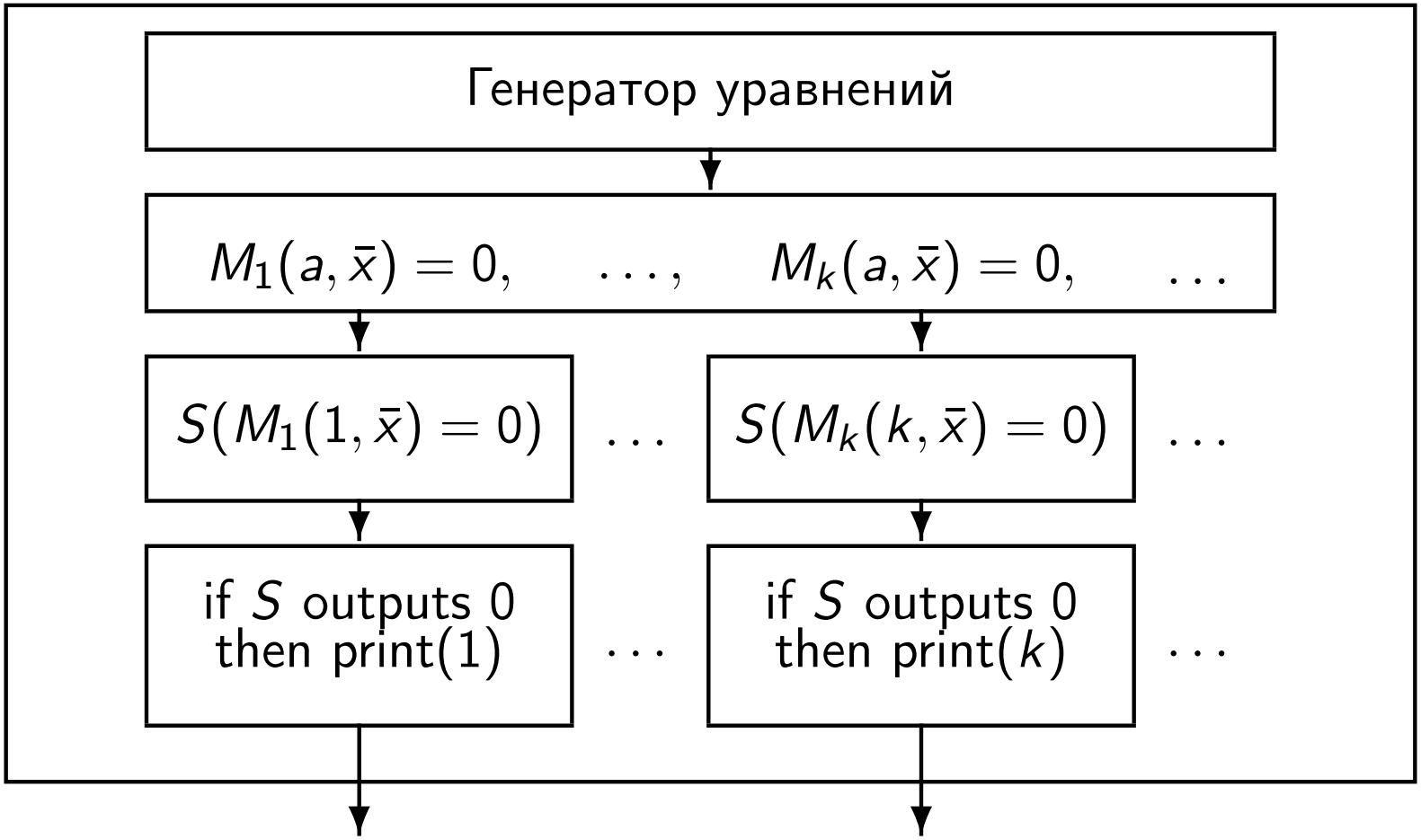
Программа профессора



Программа профессора

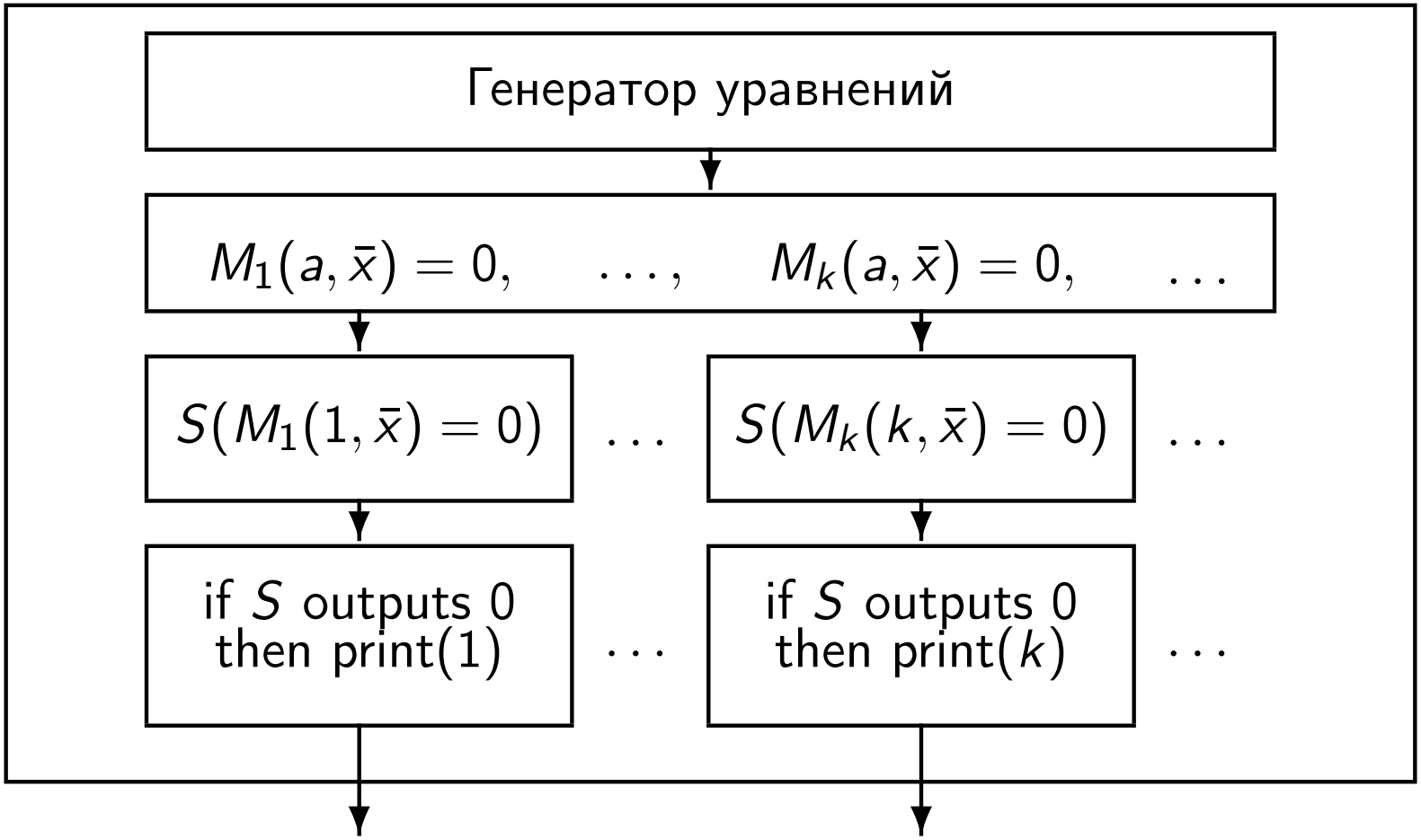


Программа профессора



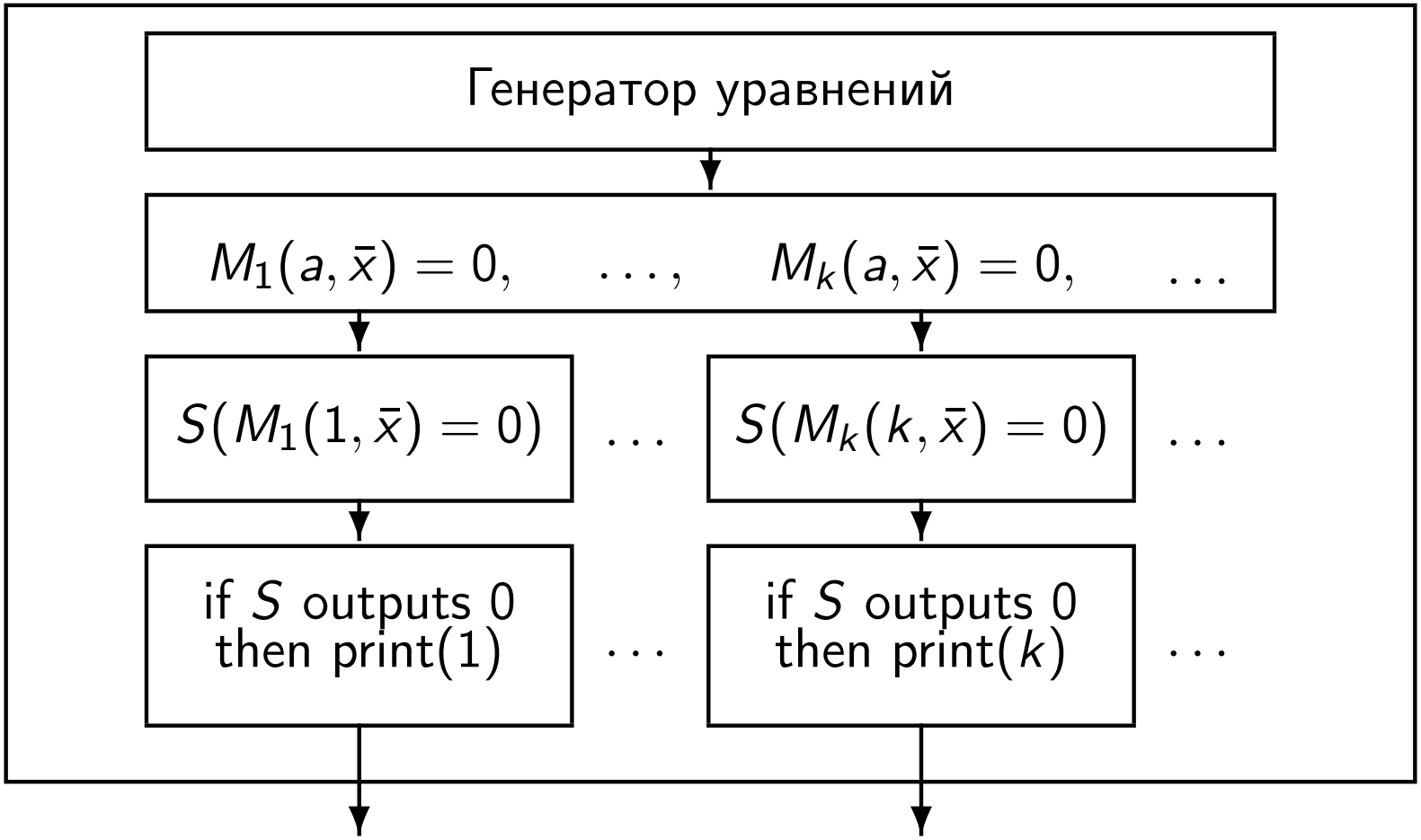
$$S(M_k(k, \bar{x}) = 0) = 0 \;\Leftrightarrow\; k \in \mathcal{M}_S$$

Программа профессора



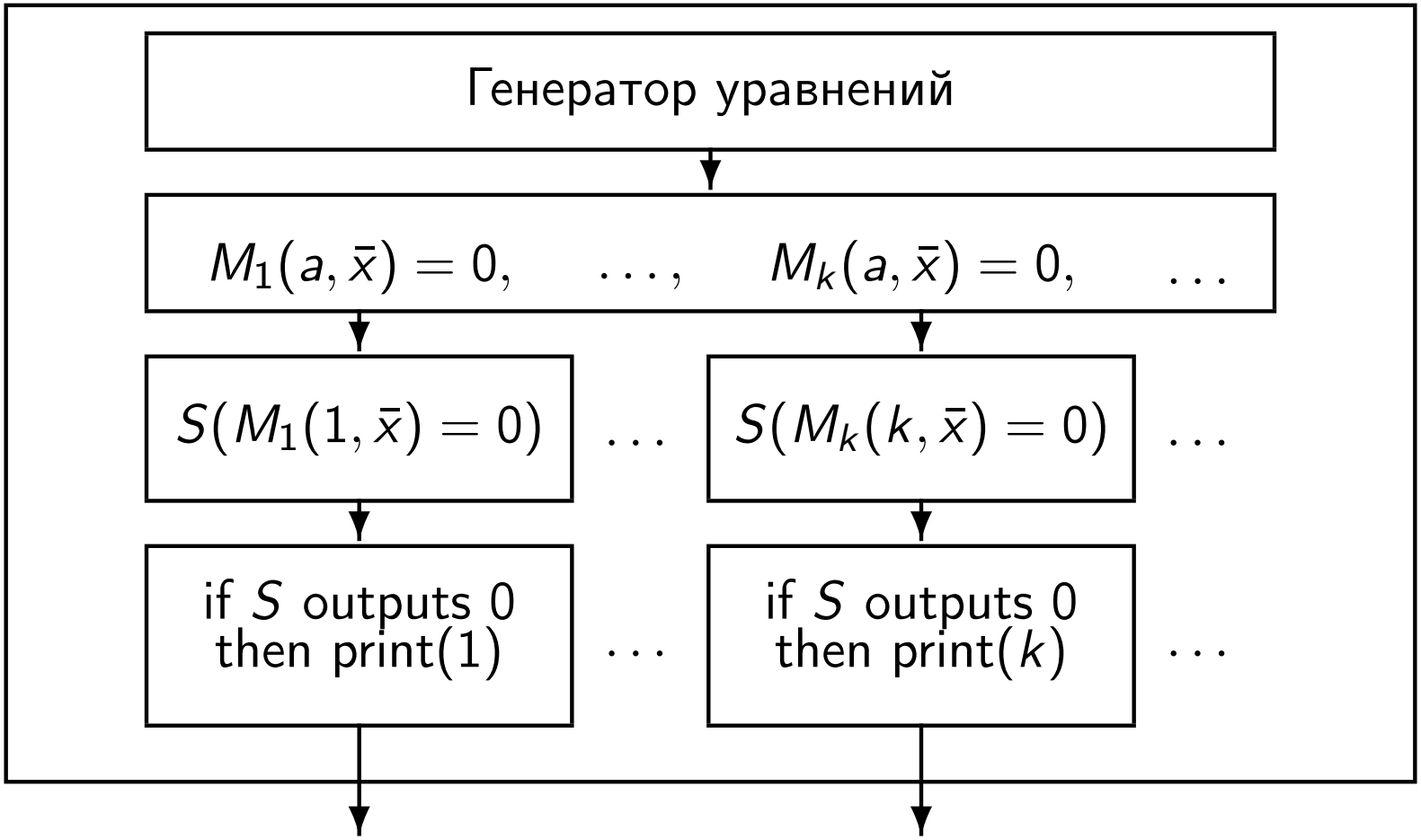
$$S(M_k(k, \bar{x}) = 0) = 0 \;\Leftrightarrow\; k \in \mathcal{M}_S$$

Программа профессора



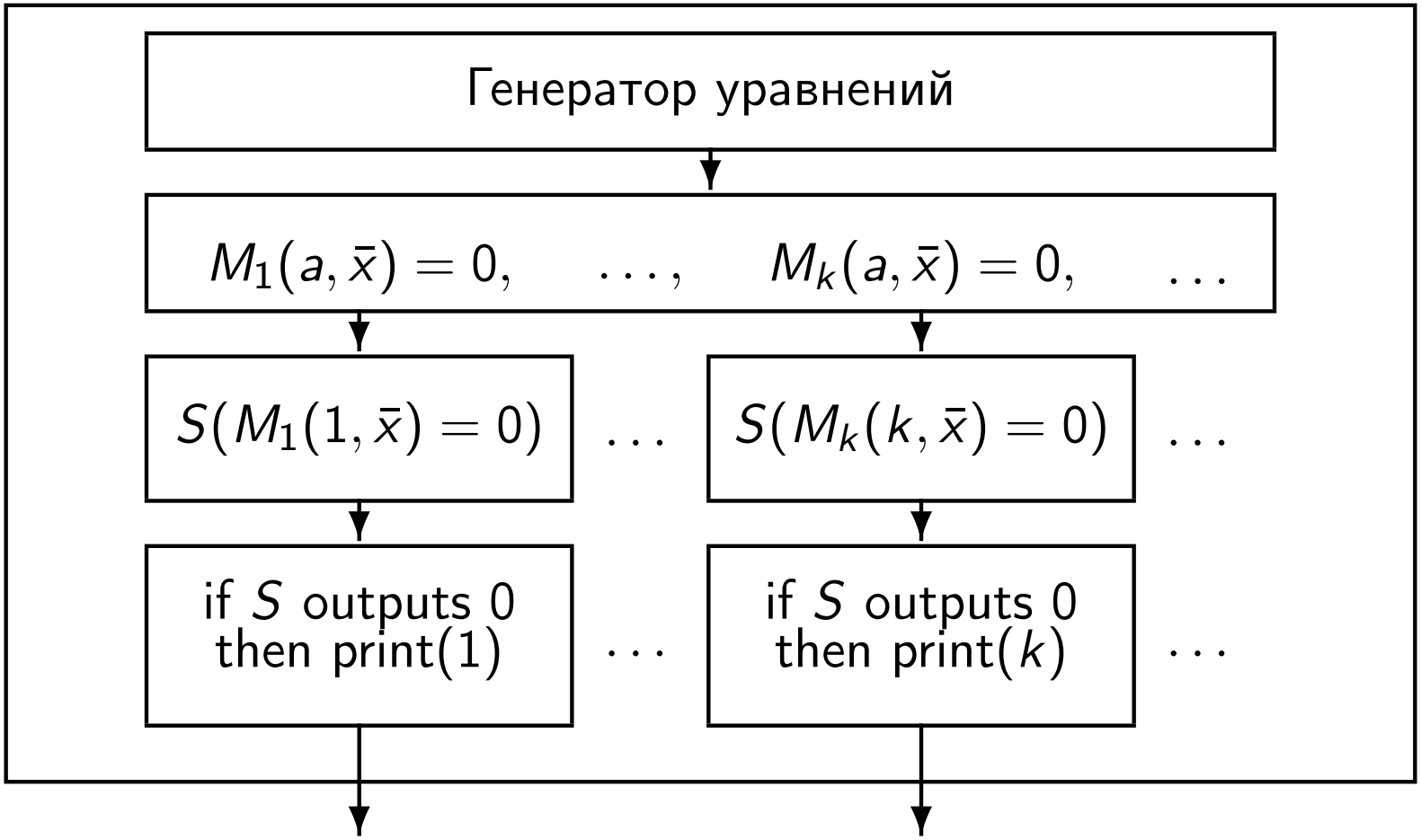
$$S(M_k(k, \bar{x}) = 0) = 0 \;\Leftrightarrow\; k \in \mathcal{M}_S \;\Leftrightarrow\; \exists \bar{x}\{M_S(k, \bar{x}) = 0\}$$

Программа профессора



$$S(M_k(k,\bar{x}) = 0) = 0 \;\Leftrightarrow\; k \in \mathcal{M}_S \;\Leftrightarrow\; \exists\bar{x}\{M_{k_S}(k,\bar{x}) = 0\}$$

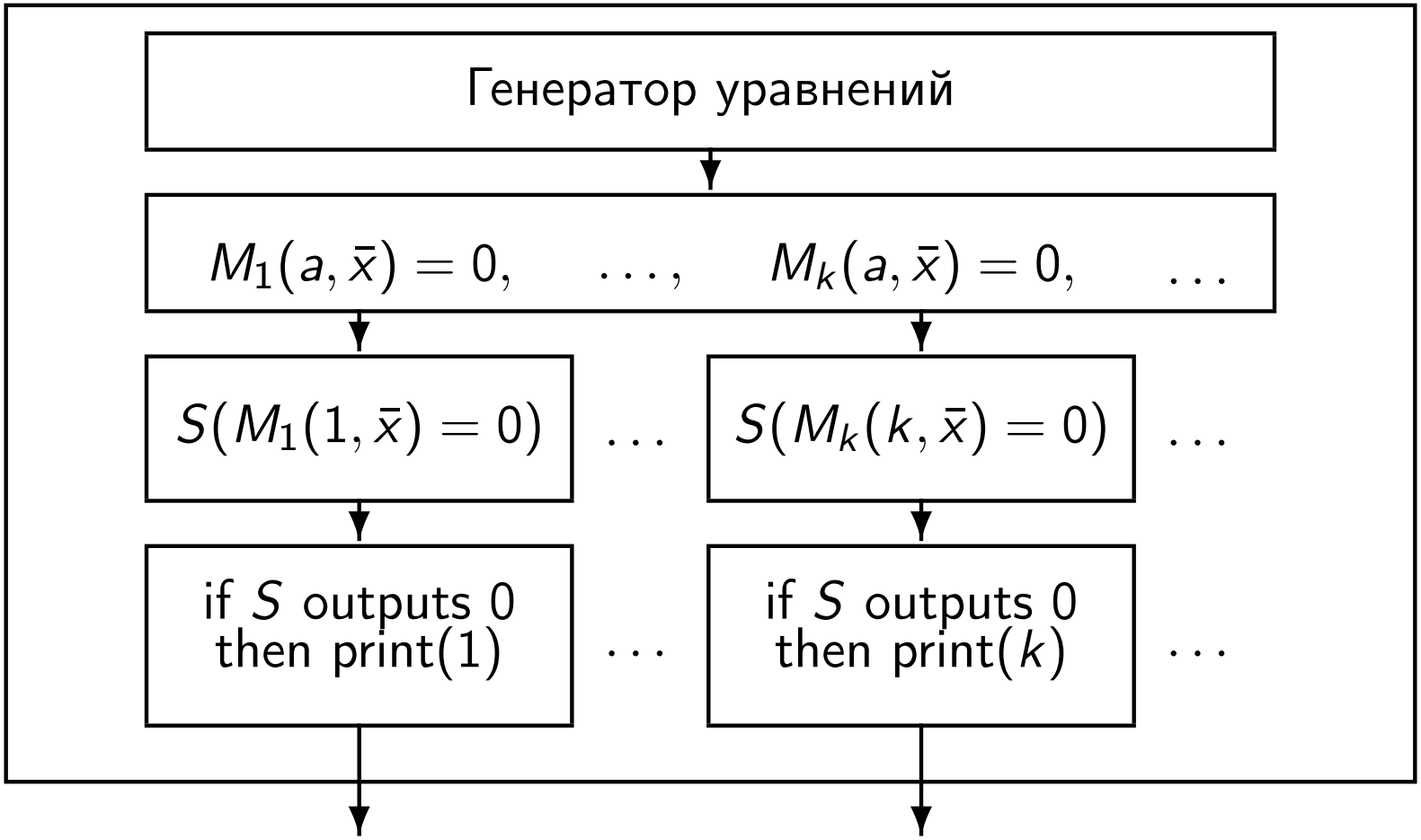
Программа профессора



$$S(M_k(k,\bar{x}) = 0) = 0 \;\Leftrightarrow\; k \in \mathcal{M}_S \;\Leftrightarrow\; \exists\bar{x}\{M_{k_S}(k,\bar{x}) = 0\}$$

$$S(M_{k_S}(k_S,\bar{x}) = 0)$$

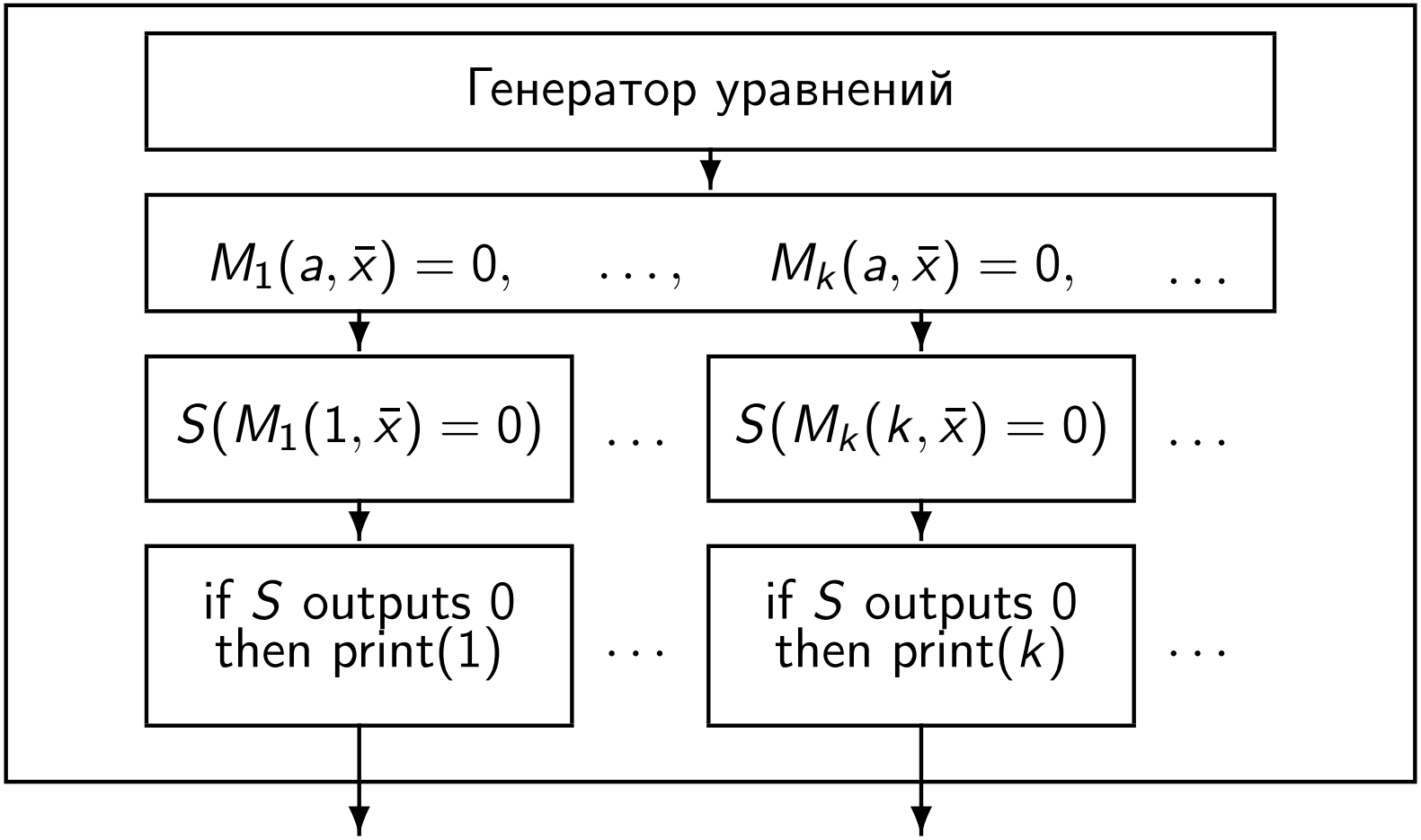
Программа профессора



$$S(M_k(k,\bar{x}) = 0) = 0 \;\Leftrightarrow\; k \in \mathcal{M}_S \;\Leftrightarrow\; \exists \bar{x}\{M_{k_S}(k,\bar{x}) = 0\}$$

$$S(M_{k_S}(k_S,\bar{x}) = 0) = ?$$

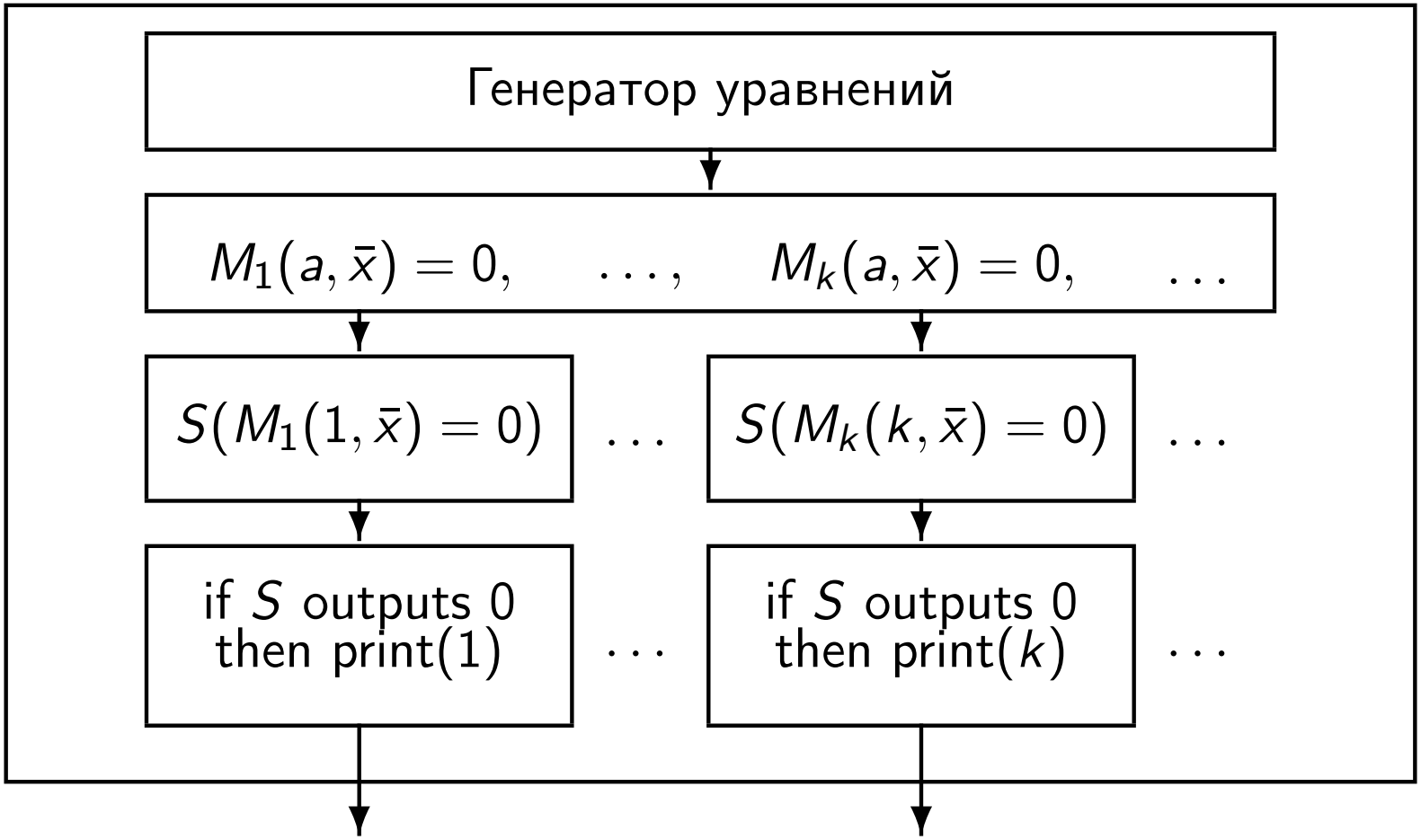
Программа профессора



$$S(M_k(k,\bar{x}) = 0) = 0 \;\Leftrightarrow\; k \in \mathcal{M}_S \;\Leftrightarrow\; \exists\bar{x}\{M_{k_S}(k,\bar{x}) = 0\}$$

$$S(M_{k_S}(k_S,\bar{x}) = 0) = 0$$

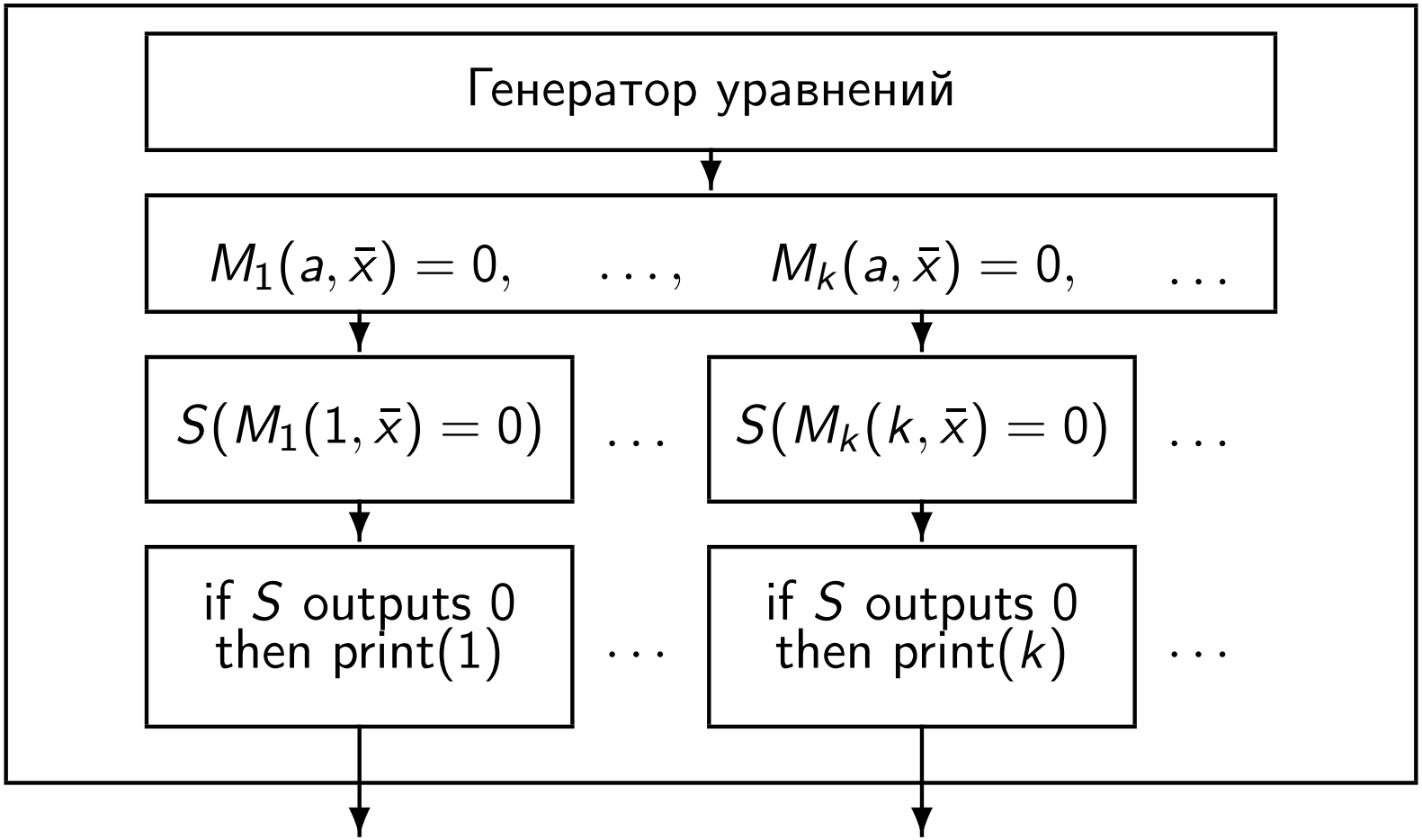
Программа профессора



$$S(M_k(k,\bar{x}) = 0) = 0 \;\Leftrightarrow\; k \in \mathcal{M}_S \;\Leftrightarrow\; \exists \bar{x}\{M_{k_S}(k,\bar{x}) = 0\}$$

$$S(M_{k_S}(k_S,\bar{x}) = 0) = 0 \;\Rightarrow\; k_S \in \mathcal{M}_S$$

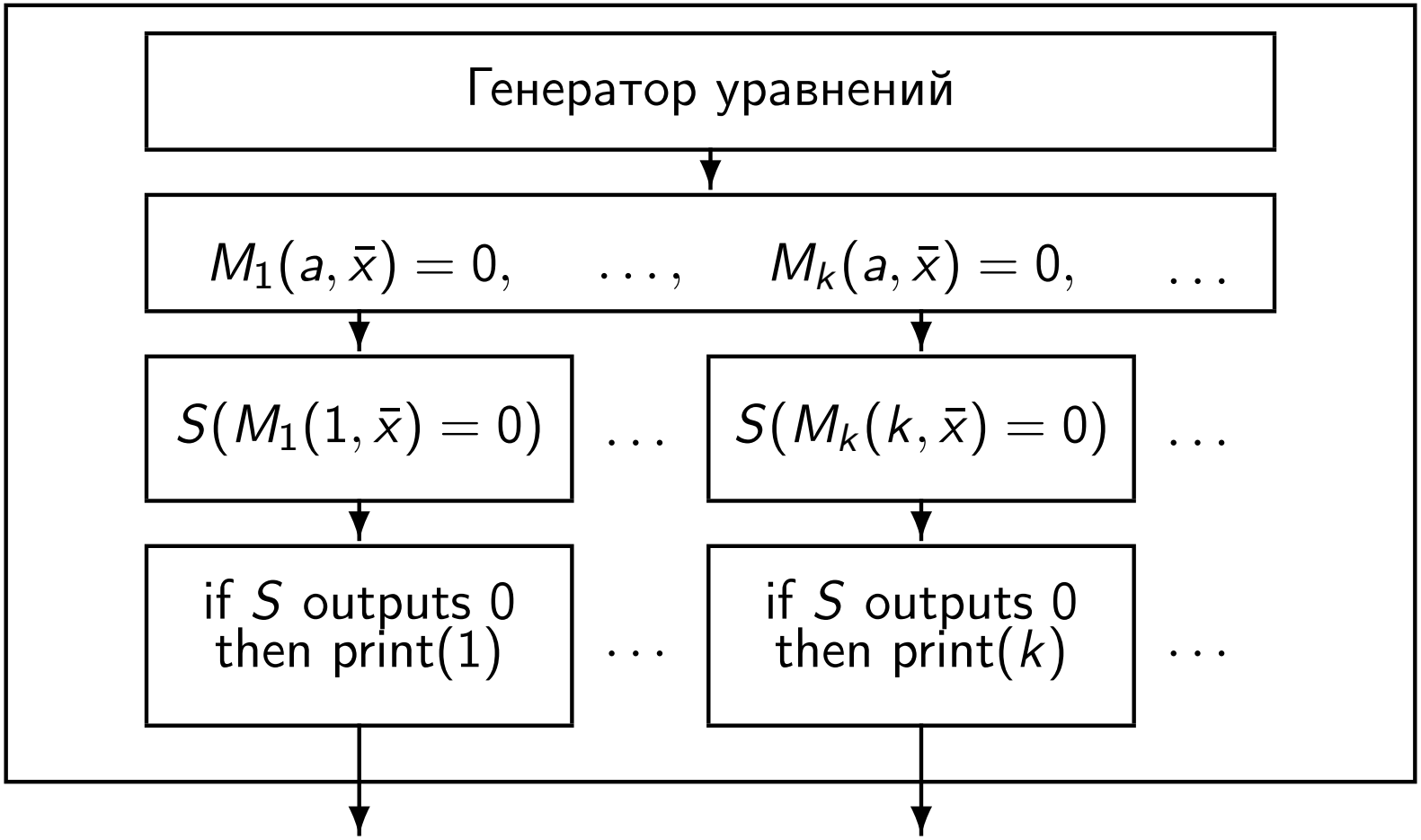
Программа профессора



$$S(M_k(k,\bar{x}) = 0) = 0 \;\Leftrightarrow\; k \in \mathcal{M}_S \;\Leftrightarrow\; \exists\bar{x}\{M_{k_S}(k,\bar{x}) = 0\}$$

$$S(M_{k_S}(k_S,\bar{x}) = 0) = 0 \;\Rightarrow\; k_S \in \mathcal{M}_S \;\Rightarrow\; \exists\bar{x}\{M_{k_S}(k_S,\bar{x}) = 0\}$$

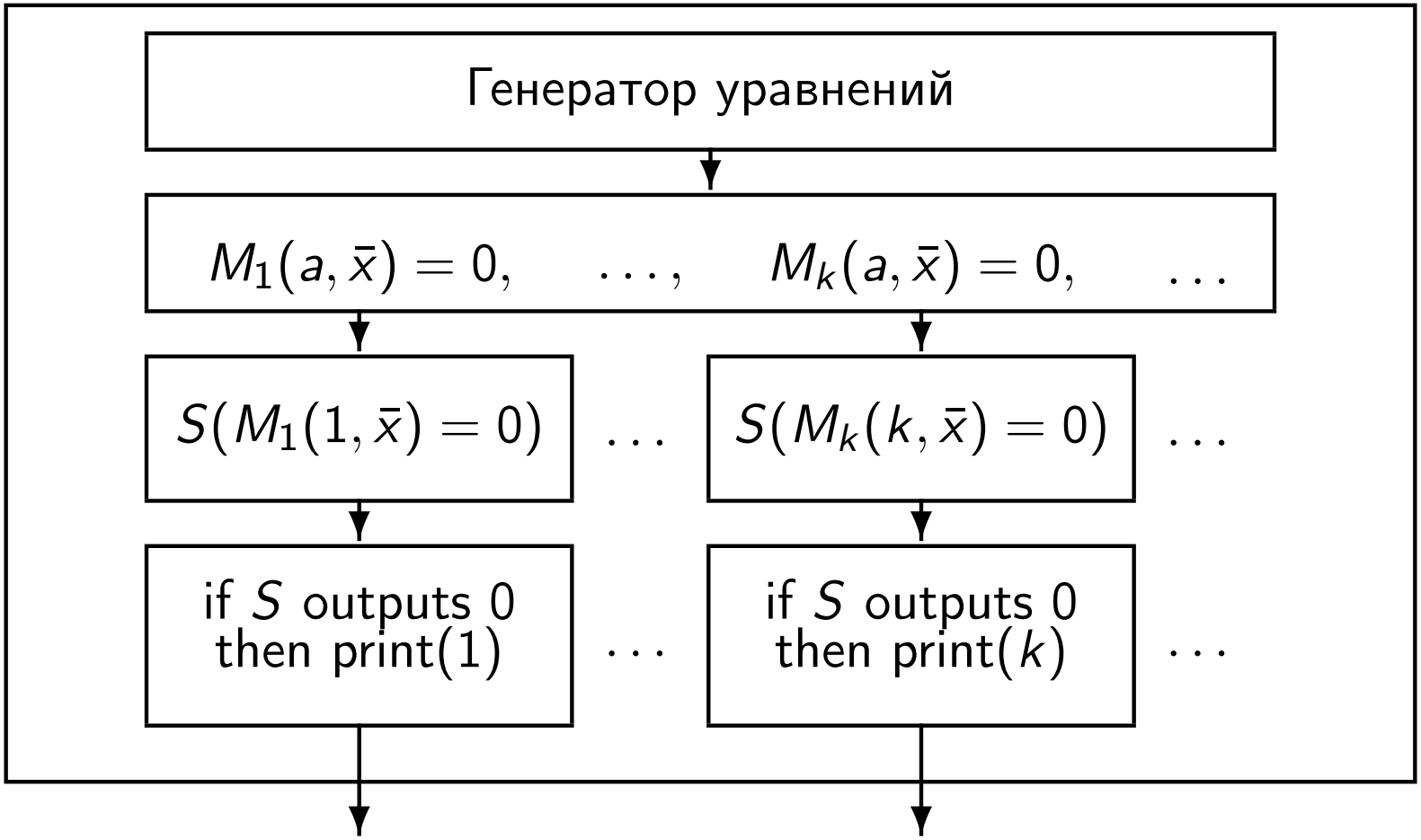
Программа профессора



$$S(M_k(k,\bar{x}) = 0) = 0 \;\Leftrightarrow\; k \in \mathcal{M}_S \;\Leftrightarrow\; \exists\bar{x}\{M_{k_S}(k,\bar{x}) = 0\}$$

$$S(M_{k_S}(k_S,\bar{x}) = 0) = 1$$

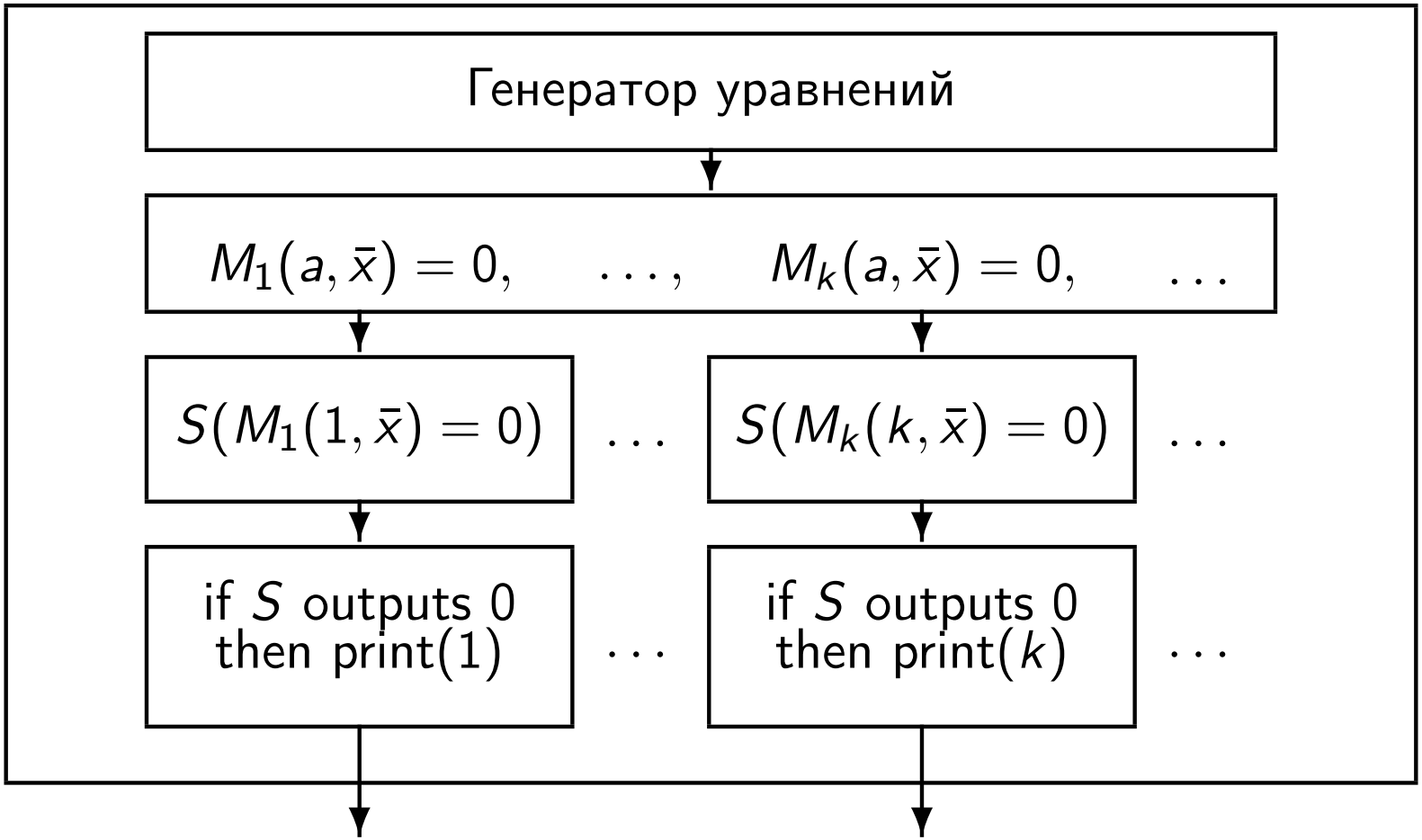
Программа профессора



$$S(M_k(k,\bar{x}) = 0) = 0 \;\Leftrightarrow\; k \in \mathcal{M}_S \;\Leftrightarrow\; \exists\bar{x}\{M_{k_S}(k,\bar{x}) = 0\}$$

$$S(M_{k_S}(k_S,\bar{x}) = 0) = 1 \;\Rightarrow\; k_S \notin \mathcal{M}_S$$

Программа профессора



$$S(M_k(k,\bar{x}) = 0) = 0 \;\Leftrightarrow\; k \in \mathcal{M}_S \;\Leftrightarrow\; \exists\bar{x}\{M_{k_S}(k,\bar{x}) = 0\}$$

$$S(M_{k_S}(k_S,\bar{x}) = 0) = 1 \;\Rightarrow\; k_S \notin \mathcal{M}_S \;\Rightarrow\; \neg\exists\bar{x}\{M_{k_S}(k_S,\bar{x}) = 0\}$$

Универсальное уравнение

Универсальное уравнение

Список всех однопараметрических уравнений:

$$M_1(a, x_1, \dots) = 0, \dots, M_k(a, x_1, \dots) = 0, \dots$$

Универсальное уравнение

Список всех однопараметрических уравнений:

$$M_1(a, x_1, \dots) = 0, \dots, M_k(a, x_1, \dots) = 0, \dots$$

$$\langle a, k \rangle \in \mathfrak{U} \Leftrightarrow \exists x_1, \dots \{M_k(a, x_1, \dots) = 0\}$$

Универсальное уравнение

Список всех однопараметрических уравнений:

$$M_1(a, x_1, \dots) = 0, \dots, M_k(a, x_1, \dots) = 0, \dots$$

$$\langle a, k \rangle \in \mathfrak{U} \Leftrightarrow \exists x_1, \dots \{M_k(a, x_1, \dots) = 0\}$$

$$\langle a, k \rangle \in \mathfrak{U} \;\Leftrightarrow\; \exists y_1 \dots y_n \{U(a, k, y_1, \dots, y_n) = 0\}$$

Универсальное уравнение

Список всех однопараметрических уравнений:

$$M_1(a, x_1, \dots) = 0, \dots, M_k(a, x_1, \dots) = 0, \dots$$

$$\langle a, k \rangle \in \mathfrak{U} \Leftrightarrow \exists x_1, \dots \{M_k(a, x_1, \dots) = 0\}$$

$$\langle a, k \rangle \in \mathfrak{U} \;\Leftrightarrow\; \exists y_1 \dots y_n \{U(a, k, y_1, \dots, y_n) = 0\}$$

$$\exists x_1, \dots \{M_k(a, x_1, \dots) = 0\} \;\Leftrightarrow\; \exists y_1 \dots y_n \{U(a, k, y_1, \dots, y_n) = 0\}$$

Текущие рекорды

Задача о решении произвольного параметрического диофантова уравнения может быть сведена к решению эквивалентного диофантова уравнения, имеющего степень D и N неизвестных, где в качестве $\langle D, N\rangle$ можно взять любую из следующих пар:

$$\langle 4, 58\rangle,\ \langle 8, 38\rangle,\ \langle 12, 32\rangle,\ \langle 16, 29\rangle, \langle 20, 28\rangle,\ \langle 24, 26\rangle,\ \langle 28, 25\rangle,\ \langle 36, 24\rangle,$$
$$\langle 96, 21\rangle,\ \langle 2668, 19\rangle,\ \langle 2 \times 10^5, 14\rangle, \langle 6.6 \times 10^{43},\ 13\rangle,\ \langle 1.3 \times 10^{44}, 12\rangle,$$
$$\langle 4.6 \times 10^{44}, 11\rangle,\ \langle 8.6 \times 10^{44}, 10\rangle,\ \langle 1.6 \times 10^{45}, 9\rangle.$$

Непростой многочлен для простых чисел

Теорема (J.P.Jones, D.Sato, H.Wada, D.Wiens, [1976])
Множество всех простых чисел – это в точности множество всех положительных значений, принимаемых многочленом

$$
\begin{aligned}
(k+2)\{\quad 1 \quad & -[wz+h+j-q]^2 \\
& -[(gk+2g+k+1)(h+j)+h-z]^2 \\
& -[2n+p+q+z-e]^2 \\
& -\left[16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2\right]^2 \\
& -\left[e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2\right]^2 \\
& -\left[(a^2-1)y^2+1-x^2\right]^2 \\
& -\left[16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2\right]^2-[n+l+v-y]^2 \\
& -\left[\left((a+u^2(u^2-a))^2-1\right)(n+4dy)^2+1-(x+cu)^2\right]^2 \\
& -\left[(a^2-1)l^2+1-m^2\right]^2 \\
& -\left[q+y(a-p-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2)-x\right]^2 \\
& -\left[z+pl(a-p)+t(2ap-p^2-1)-pm\right]^2 \\
& -[ai+k+1-l-i]^2 \\
& -\left[p+l(a-n-1)+b(2an+2a-n^2-2n-2)-m\right]^2\ \}
\end{aligned}
$$

при натуральных значениях 26 переменных $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

Диофантовы машины

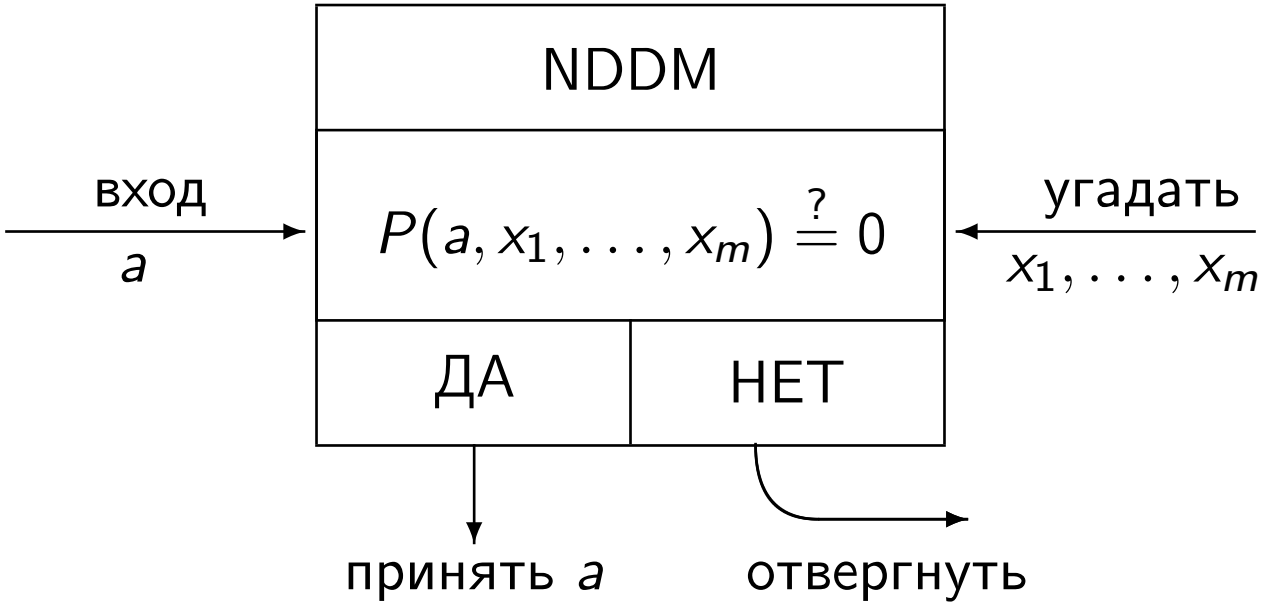
Формализация недетерминизма

Leonard Adleman и Kenneth Manders [1976] ввели понятие недетерминированной диофантовой машины, NDDM .

Диофантовы машины

Формализация недетерминизма

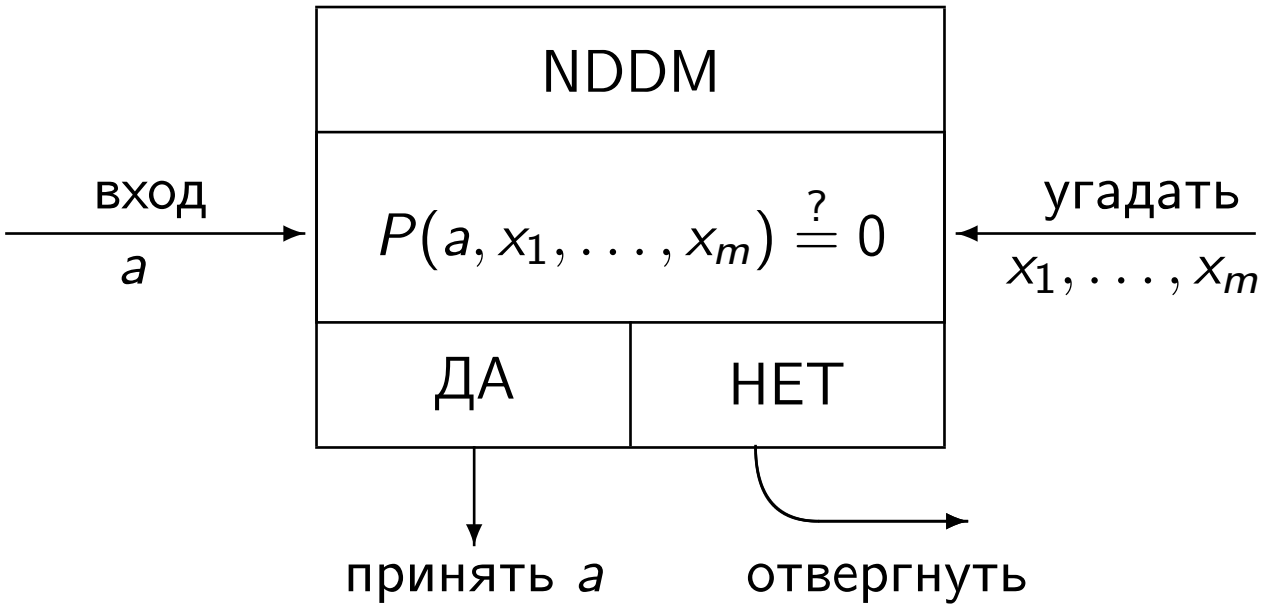
Leonard Adleman и Kenneth Manders [1976] ввели понятие недетерминированной диофантовой машины, NDDM .



Диофантовы машины

Формализация недетерминизма

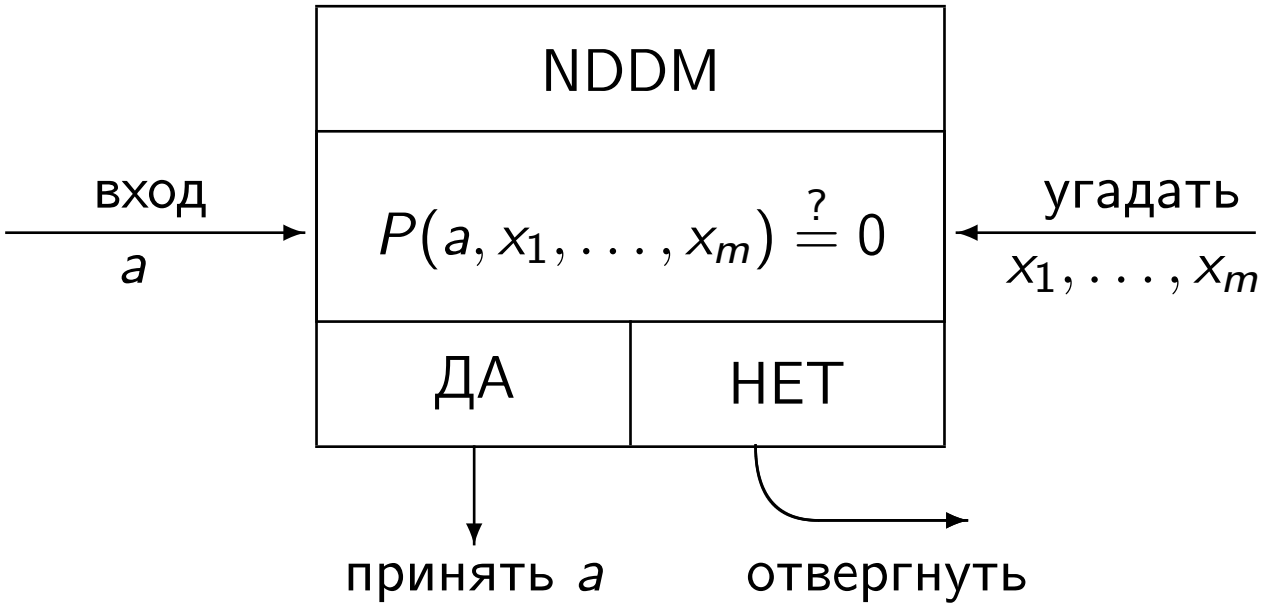
Leonard Adleman и Kenneth Manders [1976] ввели понятие недетерминированной диофантовой машины, NDDM .



DPRM-теорема: NDDM имееют такую же вычислительную силу как, например, машины Тьюринга, то есть любое множество, принимаемое некоторой машиной Тьюринга, принимается некоторой NDDM, и, очевидно, наоборот.

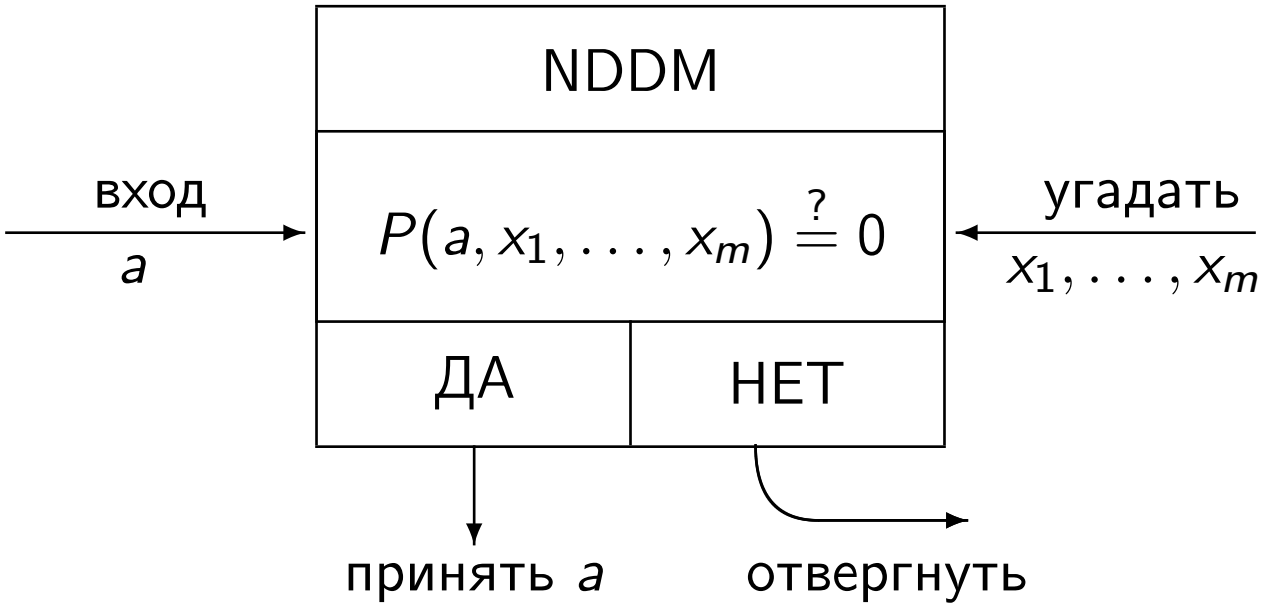
Диофантова сложность

Определения



Диофантова сложность

Определения



SIZE(a)=минимально возможное значение $|x_1| + \cdots + |x_m|$, где $|x|$ обозначает длину двоичной записи x.

Диофантова сложность

D vs NP

Leonard Adleman и Kenneth Manders [1975] ввели в рассмотрение класс **D** состоящий из множеств $\mathcal{M}$ имеющих представления вида

$$a \in \mathcal{M} \iff$$
$$\iff \exists x_1 \dots x_m \big[P(a, x_1, \dots, x_m) = 0 \,\&\, |x_1| + \dots + |x_m| \leq |a|^k \big].$$

Диофантова сложность

D vs NP

Leonard Adleman и Kenneth Manders [1975] ввели в рассмотрение класс **D** состоящий из множеств $\mathcal{M}$ имеющих представления вида

$$a \in \mathcal{M} \iff$$
$$\iff \exists x_1 \dots x_m \big[P(a, x_1, \dots, x_m) = 0 \,\&\, |x_1| + \dots + |x_m| \leq |a|^k \big].$$

Открытая проблема. $\mathbf{D} \stackrel{?}{=} \mathbf{NP}$.