Теорема об эквивалентности доходности

Сергей Николенко

Теория экономических механизмов — ИТМО, весна 2008

Outline

Аукционы

- Сейчас мы опять будем в ситуации аукционов.
- N покупателей, у каждого ценность x_i, которая накидывается случайной величиной X_i, распределённой по $F(x)$.
- В аукционе A агент i платит $m_i^A(x_i)$.
- Есть ещё $G(x) = F(x)^{N-1}$ — первая порядковая статистика $N-1$ агента.

Стандартные аукционы

- Мы ограничимся *стандартными аукционами*, в которых вещь достаётся тому, кто больше всех предложил.
- При этом конечно, то, сколько он в действительности заплатит, зависит от формы аукциона.
- Пример нестандартного аукциона — лотерея; платят все, потом приз получают с шансами, пропорциональными потраченной сумме.

Ожидаемые выплаты

- Рассмотрим некий стандартный аукцион A; у него есть равновесие.
- В этом равновесии агент i ожидает выплатить $m_i^A(x_i)$.
- Агенты у нас будут одинаковы, поэтому m^A не зависит от i.
- Предположим, кроме того, что участник со ставкой 0 платит 0 (начальное условие).

Формулировка

Теорема

Пусть скрытые значения агентов x_i распределены независимо и одинаково, и все агенты нейтральны к риску. Тогда любое симметричное равновесие любого стандартного аукциона, такое, что ожидаемая выплата агента со ставкой 0 равна нулю, даёт один и тот же ожидаемый доход продавцу.

Суть

- Иначе говоря, какой бы аукцион мы ни устраивали, при этих условиях (одинаковых агентах) нас ждёт в среднем совершенно одинаковая прибыль!
- Звучит очень странно, но сейчас докажем.

Доказательство

- Рассмотрим первого агента; остальные следуют равновесной стратегии β, а он ставит $\beta(z)$.
- Он выигрывает, когда его ставка $\beta(z)$ превышает самую большую из других ставок $\beta(Y_1)$, т.е. когда $z > Y_1$.
- Его ожидаемая прибыль равна

$$\Pi^A(z, x) = G(z)x - m^A(z),$$

где $G(z) = F(z)^{N-1}$ (распределение Y_1).

Доказательство

- Его ожидаемая прибыль равна

$$\Pi^A(z,x) = G(z)x - m^A(z),$$

где $G(z) = F(z)^{N-1}$ (распределение Y_1).

- Тут главное в том, что его выплата $m^A(z)$ зависит от β и от z, но не зависит от его настоящего значения x.
- Давайте теперь максимизировать прибыль; получается условие:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Pi^A(z,x) = g(z)x - \frac{d}{dz}m^A(z) = 0.$$

Доказательство

- Поскольку в равновесии выгодно ставить $\beta(x)$, то, значит:

$$\frac{d}{dz}m^A(y) = g(y)y,$$

-

$$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x yg(y)dy = \int_0^x yg(y)dy =$$
$$= G(x) \times \boldsymbol{E}[Y_1 | Y_1 < x].$$

Доказательство

- $$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x yg(y)dy = \int_0^x yg(y)dy = \\ = G(x) \times \boldsymbol{E}[Y_1 | Y_1 < x].$$
- Вот и получилось, что ожидаемая выплата агента не зависит от A, а только от распределения на x! $\square$

Пример

- Предположим, что ценности распределены равномерно на $[0,1]$.
- Тогда $F(x)=x$, $G(x)=x^{N-1}$, и
$$\beta(x)=\frac{N-1}{N}x.$$
- Какой в этом случае будет доход у продавца?

Пример

- Из теоремы получается, что

$$\begin{aligned} m^A(x) &= \frac{N-1}{N}x^N, \\ \boldsymbol{E}[m^A(x)] &= \frac{N-1}{N(N+1)}. \end{aligned}$$

- А ожидаемый доход продавца — это $N \cdot \boldsymbol{E}[m^A(x)]$:

$$\boldsymbol{E}[R^A] = \frac{N-1}{N+1}.$$

Ещё раз итог

- Мы получили не только факт: «ожидаемая выплата не зависит от аукциона».
- Мы ещё и получили конкретную формулу для этой выплаты:
$$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x yg(y)dy,$$
$$g(x) = G'(x) = (F(x)^{N-1})' = (N-1)f(x)F(x)^{N-2}.$$
- Обычно $m^A(0) = 0$.

Ещё раз итог

- Как известно (правда, я не знаю, кто это сказал), «theorems come and go, a good formula remains for ever».

$$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x y g(y) dy,$$

$$g(x) = G'(x) = (F(x)^{N-1})' = (N-1) f(x) F(x)^{N-2}.$$

- Пользоваться мы будем в основном именно формулой, а не просто общим фактом.

Ещё раз итог

- И ещё важное замечание. Мы получили формулу, которая говорит: «если равновесие есть, то оно есть именно тут»:

$$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x yg(y)dy,$$

$$g(x) = G'(x) = (F(x)^{N-1})' = (N-1)f(x)F(x)^{N-2}.$$

- Но это не значит автоматически, что равновесие есть! Это придётся проверять отдельно, и не везде оно присутствует.

All-pay auction

- Давайте рассмотрим аукцион, где все делают ставки, потом *все платят*, сколько поставили, а потом вещь дают тому, кто заплатил больше.
- Мы уже говорили, что такое бывает: лоббирование или рекламные кампании.
- Чему будет равна ожидаемая выплата?

Равновесие в all-pay аукционе

- В таком аукционе ожидаемая выплата *строго равна* ставке. Поэтому если равновесие есть, оно должно быть тут:

$$m^{\text{all}-\text{pay}}(x) = \int_0^x y g(y) dy = \beta^{\text{all}-\text{pay}}(x).$$

- Проверим, что это действительно равновесие (по Нэшу хотя бы). Пусть все играют по $\beta^{\text{all}-\text{pay}}$, а один ставит z. Тогда он получит

$$G(z)x - \beta(z) = G(z)x - \int_0^z g(y) dy = G(z)(x-z) + \int_0^z G(y) dy.$$

- Это мы уже где-то видели... когда рассматривали аукцион первой цены. Значит, и тут равновесие будет.

Аукцион третьей цены

- А вот ещё экзотическая схема: аукцион третьей цены.
- Ставишь, если поставил больше всех, платишь третью сверху ставку.
- Мы его разберём для примера, заодно статистику вспомним.

Ожидаемые выплаты

- Во-первых, наша формула говорит, что
$$m^{\mathrm{III}}(x) = \int_0^x yg(y)dy.$$
- С другой стороны, ожидаемая выплата — это значит, что когда $Y_1 < x$, игрок платит $\beta^{\mathrm{III}}(Y_2)$, где Y_2 — вторая сверху цена из других $N-1$.
- Схема дальнейших действий: получим ту формулу, приравняем этой, потом из них выведем β^{III}.

Порядковые статистики

- Рассмотрим распределение F с плотностью $f = F'$.
- Какова плотность второй порядковой статистики Y_2 в выборке из n элементов?

Порядковые статистики

- Рассмотрим распределение F с плотностью $f = F'$.
- Какова плотность второй порядковой статистики Y_2 в выборке из n элементов?
- Событие $Y_2 < y$ — это объединение двух непересекающихся событий:
  - все X_k меньше y;
  - $n-1$ из X_k меньше y, а один X_k больше y.

Порядковые статистики

- Рассмотрим распределение F с плотностью $f = F'$.
- Какова плотность второй порядковой статистики Y_2 в выборке из n элементов?
- Итого получается

$$F_2^{(n)}(y) = F(y)^n + nF(y)^{n-1}(1-F(y)) = nF(y)^{n-1} - (n-1)F(y)^n.$$

- А плотность

$$f_2^{(n)}(y) = n(n-1)(1-F(y))F(y)^{n-2}f(y).$$

Условные порядковые статистики

- Но нас ещё интересуют условные вероятности. Сначала — совместная вероятность:

$$f_{\mathbf{Y}}^{(n)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n! f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_n),$$

если $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$, и 0 в противном случае.

Условные порядковые статистики

- Обобщим с n на $k < n$:

$$f_{\mathbf{Y}}^{(n)}(y_1, y_2, \ldots, y_k) =$$
$$= \frac{\int_{-\infty}^{y_k} \ldots \int_{-\infty}^{y_k} f_{\mathbf{Y}}^{(n)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) dy_{k+1} \ldots dy_n}{(n-k)!}.$$

Условные порядковые статистики

- Проинтегрируем:

$$\frac{\int_{-\infty}^{y_k}\dots\int_{-\infty}^{y_k} f_{\mathbf{Y}}^{(n)}(y_1, y_2, \dots, y_n)dy_{k+1}\dots dy_n}{(n-k)!}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{y_k}\dots\int_{-\infty}^{y_k} n!f(y_1)f(y_2)\dots f(y_n)dy_{k+1}\dots dy_n}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n!F(y_k)^{n-k}f(y_1)f(y_2)\dots f(y_k)}{(n-k)!}.$$

Условные порядковые статистики

- Например, при $k = 2$ мы получим

$$f_{1,2}^{(n)}(y_1, y_2) = n(n-1)f(y_1)f(y_2)F(y_2)^{n-2}.$$

Условные порядковые статистики

- Теперь можно и условную вероятность вывести:

$$f_2^{(n)}\left(z \mid Y_1^{(n)} = y\right) = \frac{f_{1,2}^{(n)}(y,z)}{f_1^{(n)}(y)} = \\ = \frac{n(n-1)f(y)f(z)F(z)^{n-2}}{nf(y)F(y)^{n-1}} = \\ = \frac{(n-1)f(z)F(z)^{n-2}}{F(y)^{n-1}} = \frac{f_1^{(n-1)}(z)}{F(y)^{n-1}}.$$

Условные порядковые статистики

- Найдём условную вероятность второй порядковой статистики при условии первой:

$$f_2^{(n)}\left(y \mid Y_1^{(n)} < x\right) = \frac{\int_y^x f_{1,2}^{(n)}(z,y)dz}{F_1^{(n)}(x)} =$$

$$= \frac{1}{F_1^{(n)}(x)} \int_y^x n(n-1)f(z)f(y)F(y)^{n-2}dz =$$

$$= \frac{1}{F_1^{(n)}(x)} \left[n(n-1)F(z)f(y)F(y)^{n-2}\right]_x^y =$$

$$= \frac{n(F(x)-F(y))f_1^{(n-1)}(y)}{F_1^{(n)}(x)}.$$

Возвращаясь к выплатам

- Итак, мы тут вспомнили, что

$$f_2^{(N-1)}(y \mid Y_1 < x) = \frac{(N-1)(F(x)-F(y))f_1^{(N-2)}(y)}{F_1^{(N-1)}(x)}.$$

- Тогда ожидаемая выплата будет вот какая:

$$m^{\mathrm{III}}(x) = F_1^{(N-1)}(x)\boldsymbol{E}\left[\beta^{\mathrm{III}}(Y_2) \mid Y_1 < x\right] =$$
$$= \int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y)(N-1)(F(x)-F(y))f_1^{(N-2)}(y)dy.$$

Вывод оптимальной стратегии

- Приравняем это тому, что из теоремы получалось:

$$\int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y)(N-1)(F(x)-F(y))f_1^{(N-2)}(y)dy = \int_0^x yg(y)dy.$$

- Продифференцируем по x:

$$(N-1)f(x)\int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y)f_1^{(N-2)}(y)dy = xg(x),$$

то есть

$$(N-1)f(x)\int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y)f_1^{(N-2)}(y)dy = (N-1)xf(x)F(x)^{N-2}.$$

Вывод оптимальной стратегии

- Т.к. $F_1^{N-2}(x) = F(x)^{N-2}$, получается:

$$\int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y) f_1^{(N-2)}(y) dy = x F_1^{(N-2)}(x).$$

- Ещё разик продифференцируем по x:

$$\beta^{\mathrm{III}}(x) f_1^{(N-2)}(x) = x f_1^{(N-2)}(x) + F_1^{(N-2)}(x),$$

$$\beta^{\mathrm{III}}(x) = x + \frac{F_1^{(N-2)}(x)}{f_1^{(N-2)}(x)} = x + \frac{F(x)}{(N-2) f(x)}.$$

Уфффф + ложка дёгтя

- Итак, уфффф, получилось:

$$\beta^{\text{III}}(x) = x + \frac{F(x)}{(N-2)f(x)}.$$

- Ложка дёгтя: это всё верно, только когда β возрастает; а для этого, как видно, надо, чтобы F/f возрастало.
- То есть $\ln F$ должен быть вогнутой функцией (говорят, что F log-вогнута, log-concave).

Забавное свойство

- Стратегия:
$$\beta^{\mathrm{III}}(x) = x + \frac{F(x)}{(N-2)f(x)}.$$
- У неё есть забавное свойство: $\beta^{\mathrm{III}}(x)$ всегда строго больше x.
- То есть агенту оптимально ставить *строго больше*, чем своё скрытое значение.

Прямые механизмы в контексте аукционов

- Рассмотрим прямой механизм.
- В нём у участников просто спрашивают их скрытую стоимость: $\mathbf{\Theta} = \mathcal{X}$.

Прямые механизмы в контексте аукционов

- То есть его можно рассматривать как два правила:
  - *правило распределения* (allocation rule) $\boldsymbol{Q} = (Q_1(\boldsymbol{x}), \ldots, Q_N(\boldsymbol{x}))$ определяет вероятность, что агент i получит объект;
  - *правило выплаты* (payment rule) $\boldsymbol{M} = (M_1(\boldsymbol{x}), \ldots, M_N(\boldsymbol{x}))$ определяет ожидаемую выплату агента i.
- Множество исходов — это множество пар

$$\mathcal{O} = \{(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})) \mid \boldsymbol{x}\}.$$

Обозначения

- Обозначим через $q_i(z_i)$ ожидаемую доходность агента i, когда он говорит z_i, а остальные говорят правду:

$$q_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} Q_i(z_i, \boldsymbol{x}_{-i}) f_{-i}(\boldsymbol{x}_{-i}) \mathbf{d}\boldsymbol{x}_{-i}.$$

- А через $m_i(z_i)$ — его ожидаемую выплату:

$$m_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} M_i(z_i, \boldsymbol{x}_{-i}) f_{-i}(\boldsymbol{x}_{-i}) \mathbf{d}\boldsymbol{x}_{-i}.$$

Ожидаемый доход

- Ожидаемый доход агента i, если он говорит z_i, тогда получается как
$$q_i(z_i)x_i - m_i(z_i).$$

Правдивый механизм

Определение

Прямой механизм $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$ *называется правдивым (в этом контексте — incentive compatible), если* $\forall i\ \forall x_i, z_i$

$$U_i(x_i) = q_i(x_i)x_i - m_i(x_i) \geq q_i(z_i)x_i - m_i(z_i).$$

$U_i(x_i)$ *называется равновесной функцией дохода.*

Следствия из правдивости

- Оказывается, что уже свойства правдивости достаточно для того, чтобы вывести массу интересного.
- Сейчас мы этим займёмся.

Выпуклость

- Во-первых, совсем очевидно: из правдивости следует, что

$$U_i(x_i) = \max_{z_i}\{q_i(z_i)x_i - m_i(z_i)\}.$$

- А максимум аффинных функций — выпуклая функция.
- Значит, U_i выпукла.

Неубывание q_i

- Дальше:

$$q_i(x_i)z_i - m_i(x_i) = U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i), \text{ значит,}$$

$$U_i(z_i) \geq U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i).$$

- Выпуклая функция абсолютно непрерывна и, следовательно, дифференцируема почти всюду в своей области определения.
- Значит, $U_i'(x_i) = q_i(x_i)$ почти всюду. А т.к. U_i выпуклая, то, значит, q_i неубывает.

Неубывание q_i

- Значит, $U_i'(x_i) = q_i(x_i)$ почти всюду. А т.к. U_i выпуклая, то, значит, q_i неубывает.
- Проще говоря, если больше предложите, вероятность получить вещь не уменьшится.
- Это вполне естественно, но неочевидно, что вдруг будет следовать прямо из правдивости.

Формула для ожидаемого дохода

- Поскольку абсолютно непрерывная функция представляет собой интеграл от своей производной:

$$U_i(x_i) = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(t_i)dt_i.$$

- Мы получили, что форма ожидаемого дохода агента зависит только от правила распределения, но не от правила выплаты.
- Правило выплаты определяет только $U_i(0)$.
- Это называется payoff equivalence.

Опять про неубывание q_i

- Само неубывание q_i было вполне естественно. Но вот что уж совсем неожиданно...

$$U_i(z_i) \geq U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i),$$

$$U_i(x_i) = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(t_i)dt_i, \text{ значит,}$$

$$\int_{x_i}^{z_i} q_i(t_i)dt_i \geq q_i(x_i)(z_i - x_i).$$

- Если q_i неубывает, то это неравенство верно.
- Значит, из неубывания q_i *следует* правдивость механизма.
- В итоге мы доказали следующую теорему.

Свойства прямых механизмов

Теорема (свойства правдивых механизмов)

Каждый правдивый механизм $\mathcal{M} = (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$ с равновесными функциями дохода U_i обладает следующими свойствами:

1. *Для каждого i U_i является выпуклой функцией.*
2. *Для каждого i функция q_i является неубывающей.*
3. *Функция ожидаемого дохода агента с точностью до константы зависит только от правила распределения $\boldsymbol{Q}$, но не от правила выплаты $\boldsymbol{M}$.*
4. *Если для некоторого механизма $\mathcal{M}$ функции q_i являются неубывающими, то $\mathcal{M}$ правдив.*

И снова эквивалентность доходности

- Из вышепомянутой формулы опять, как ни странно, следует теорема об эквивалентности доходности, нужно только вспомнить, что $U_i(x) = q_i(x_i)x_i - m_i(x_i)$ и $U_i(0) = -m_i(0)$.

Теорема

Если прямой механизм $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ правдив, то для всех i и x_i ожидаемая выплата равна

$$m_i(x_i) = m_i(0) + q_i(x_i)x_i - \int_0^{x_i} q_i(t_i)dt_i,$$

и это означает, что ожидаемая выплата агента с точностью до константы зависит только от правила распределения.

Обсуждение

- Это обобщает наш предыдущий результат: теперь агенты могут быть несимметричными, и правила распределения тоже могут различаться.
- Предыдущая теорема получается как частный случай, потому что если агенты симметричны, есть неубывающая равновесная стратегия, и объект распределяется покупателю с наивысшей ставкой, то правила распределения у них у всех совпадают (зависят только от распределения F).

Обсуждение

- Revenue equivalence theorem — очень мощный инструмент. Она нам ещё не раз пригодится.
- А сейчас пора наконец переходить к тому, как строить механизмы с хорошими свойствами.

Спасибо за внимание!

- Lecture notes и слайды будут появляться на моей homepage:
  http://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/index.php?page=teaching
- Присылайте любые замечания, решения упражнений, новые численные примеры и прочее по адресам: sergey@logic.pdmi.ras.ru, snikolenko@gmail.com
- Заходите в ЖЖ smartnik.