Алгоритмическая теория игр
Лекция 9

М.Н. Вялый

Лекции в Computer Science club (Санкт-Петербург), 2019

Сохранение полноты при расширении дерева

Вложение упорядоченных деревьев

Определение

Корневое упорядоченное дерево T' **вкладывается** в корневое упорядоченное дерево T'', если существует инъективное отображение $V(T') \hookrightarrow V(T'')$ вершин дерева T' в вершины дерева T'', которое корень переводит в корень, сохраняет отношение «быть дочкой» и линейный порядок на дочках.

Неформально, дерево T' можно «нарисовать» на дереве T''.

Лемма о расширении

Если $T' \hookrightarrow T''$ и для игры с автоматом $\mathcal{A}_{T'}$ существует выигрывающая стратегия для Чёта, то выигрывающая стратегия для Чёта существует и для игры с автоматом $\mathcal{A}_{T''}$.

Вложение упорядоченных деревьев

Определение

Корневое упорядоченное дерево T' **вкладывается** в корневое упорядоченное дерево T'', если существует инъективное отображение $V(T') \hookrightarrow V(T'')$ вершин дерева T' в вершины дерева T'', которое корень переводит в корень, сохраняет отношение «быть дочкой» и линейный порядок на дочках.

Неформально, дерево T' можно «нарисовать» на дереве T''.

Лемма о расширении

Если $T' \hookrightarrow T''$ и для игры с автоматом $\mathcal{A}_{T'}$ существует выигрывающая стратегия для Чёта, то выигрывающая стратегия для Чёта существует и для игры с автоматом $\mathcal{A}_{T''}$.

Доказательство леммы о расширении

Чёт придерживается выигрывающей для $\mathcal{A}_{T'}$ стратегии.

Позиции в партии: $v_0, v_1, \ldots, v_t, \ldots$.
Состояния $\mathcal{A}_{T'}$: $q'_0, q'_1, \ldots, q'_t, \ldots$ и $\mathcal{A}_{T''}$: $q''_0, q''_1, \ldots, q''_t, \ldots$.

Утверждение: $q'_t \geqslant q''_t$ для любого t.

Доказательство индукцией по t

База: $q'_0 \geqslant q''_0$, так как q''_0 минимальный лист дерева T'', q'_0 минимальный лист поддерева T''.

Доказательство леммы о расширении

Чёт придерживается выигрывающей для $\mathcal{A}_{T'}$ стратегии.

Позиции в партии: $v_0, v_1, \ldots, v_t, \ldots$.
Состояния $\mathcal{A}_{T'}$: $q'_0, q'_1, \ldots, q'_t, \ldots$ и $\mathcal{A}_{T''}$: $q''_0, q''_1, \ldots, q''_t, \ldots$.

Утверждение: $q'_t \geqslant q''_t$ для любого t.

Доказательство индукцией по t

База: $q'_0 \geqslant q''_0$, так как q''_0 минимальный лист дерева T'', q'_0 минимальный лист поддерева T''.

Доказательство леммы о расширении

Чёт придерживается выигрывающей для $\mathcal{A}_{T'}$ стратегии.

Позиции в партии: $v_0, v_1, \dots, v_t, \dots$.
Состояния $\mathcal{A}_{T'}$: $q'_0, q'_1, \dots, q'_t, \dots$ и $\mathcal{A}_{T''}$: $q''_0, q''_1, \dots, q''_t, \dots$.

Утверждение: $q'_t \geqslant q''_t$ для любого t.

Доказательство индукцией по t

База: $q'_0 \geqslant q''_0$, так как q''_0 минимальный лист дерева T'', q'_0 минимальный лист поддерева T''.
Переход: пусть $q'_t \geqslant q''_t$.

Доказательство леммы о расширении

Чёт придерживается выигрывающей для $\mathcal{A}_{T'}$ стратегии.

Позиции в партии: $v_0, v_1, \dots, v_t, \dots$.
Состояния $\mathcal{A}_{T'}$: $q'_0, q'_1, \dots, q'_t, \dots$ и $\mathcal{A}_{T''}$: $q''_0, q''_1, \dots, q''_t, \dots$.

Утверждение: $q'_t \geqslant q''_t$ для любого t.

Доказательство индукцией по t

База: $q'_0 \geqslant q''_0$, так как q''_0 минимальный лист дерева T'', q'_0 минимальный лист поддерева T''.
Переход: пусть $q'_t \geqslant q''_t$. Если $p(v_t, v_{t+1})$ чётный, то

$$q'_{t+1} = \min_{q \in L(T')} (q : q|_p = q'_t|_p) \geqslant \min_{q \in L(T'')} (q : q|_p = q'_t|_p) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{q \in L(T'')} (q : q|_p = q''_t|_p) = q''_{t+1}.$$

Доказательство леммы о расширении

Чёт придерживается выигрывающей для $\mathcal{A}_{T'}$ стратегии.

Позиции в партии: $v_0, v_1, \ldots, v_t, \ldots$.
Состояния $\mathcal{A}_{T'}$: $q'_0, q'_1, \ldots, q'_t, \ldots$ и $\mathcal{A}_{T''}$: $q''_0, q''_1, \ldots, q''_t, \ldots$.

Утверждение: $q'_t \geqslant q''_t$ для любого t.

Доказательство индукцией по t

База: $q'_0 \geqslant q''_0$, так как q''_0 минимальный лист дерева T'', q'_0 минимальный лист поддерева T''.
Переход: пусть $q'_t \geqslant q''_t$. Если $p(v_t, v_{t+1})$ нечётный, то

$$q'_{t+1} = \min_{q \in L(T')}(q : q|_p < q'_t|_p) \geqslant \min_{q \in L(T'')}(q : q|_p < q'_t|_p) \geqslant$$
$$\geqslant \min_{q \in L(T'')}(q : q|_p < q''_t|_p) = q''_{t+1}.$$

Доказательство леммы о расширении (окончание)

$q'_t \geqslant q''_t$ для любого t (утверждение).

$q_{\mathrm{odd}} > q'_t$ для любого t (Чёт придерживается выигрывающей для $\mathcal{A}_{T'}$ стратегии).

$q_{\mathrm{odd}} > q''_t$ для любого t $\quad\Rightarrow\quad$ Чёт выигрывает в игре $\mathcal{A}_{T''}$.

Вывод

Выигрывающая стратегия Чёта в игре с автоматом $\mathcal{A}_{T'}$ является выигрывающей и в игре с автоматом $\mathcal{A}_{T''}$.

Доказательство леммы о расширении (окончание)

$q'_t \geqslant q''_t$ для любого t (утверждение).

$q_{\mathrm{odd}} > q'_t$ для любого t (Чёт придерживается выигрывающей для $\mathcal{A}_{T'}$ стратегии).

$q_{\mathrm{odd}} > q''_t$ для любого $t \quad\Rightarrow\quad$ Чёт выигрывает в игре $\mathcal{A}_{T''}$.

Вывод

Выигрывающая стратегия Чёта в игре с автоматом $\mathcal{A}_{T'}$ является выигрывающей и в игре с автоматом $\mathcal{A}_{T''}$.

Универсальные деревья

Определение

(n, h)-универсальное дерево U это

такое корневое упорядоченное дерево, что $T \hookrightarrow U$ для любого дерева T глубины h, в котором не больше n листьев.

Пример

Полное n-арное дерево глубины h является (n, h)-универсальным.

Строим вложение T глубины h с $\leqslant n$ листьями «сверху вниз»: начиная от корня. Количество дочек у каждой вершины полного n-арного дерева достаточно велико, чтобы никаких препятствий к такому вложению не было.

Определение

(n, h)-универсальное дерево U это

такое корневое упорядоченное дерево, что $T \hookrightarrow U$ для любого дерева T глубины h, в котором не больше n листьев.

Пример

Полное n-арное дерево глубины h является (n, h)-универсальным.

Строим вложение T глубины h с $\leqslant n$ листьями «сверху вниз»: начиная от корня. Количество дочек у каждой вершины полного n-арного дерева достаточно велико, чтобы никаких препятствий к такому вложению не было.

Следствие универсальности

Из полноты дерева КСС стратегического графа и леммы о расширении получаем

Полнота и корректность универсальных деревьев

Если U — (n, h)-универсальное дерево, то автомат, построенный по этому дереву является корректным и полным для любой игры чётности с $2h$ приоритетами.

Замечание

Из полного n-арного дерева глубины $d/2$ получается полный и корректный автомат. Даёт алгоритм решения игр чётности за $O(n^{d/2+\mathrm{const}})$.

Следствие универсальности

Из полноты дерева КСС стратегического графа и леммы о расширении получаем

Полнота и корректность универсальных деревьев

Если U — (n, h)-универсальное дерево, то автомат, построенный по этому дереву является корректным и полным для любой игры чётности с $2h$ приоритетами.

Замечание

Из полного n-арного дерева глубины $d/2$ получается полный и корректный автомат. Даёт алгоритм решения игр чётности за $O(n^{d/2+\mathrm{const}})$.

Следствие универсальности

Из полноты дерева КСС стратегического графа и леммы о расширении получаем

Полнота и корректность универсальных деревьев

Если U — (n, h)-универсальное дерево, то автомат, построенный по этому дереву является корректным и полным для любой игры чётности с $2h$ приоритетами.

Замечание

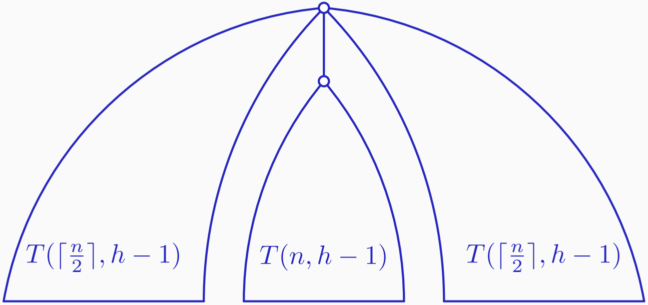
Из полного n-арного дерева глубины $d/2$ получается полный и корректный автомат. Даёт алгоритм решения игр чётности за $O(n^{d/2+\mathrm{const}})$.

Почти оптимальная конструкция

$T(n,1)$: корень с n дочками.

$T(1,h)$: путь длины h.

$T(n,h)$:



Универсальность семейства $T(n, h)$

Индукция по n, h.

База — $T(n, 1)$ и $T(1, h)$ — очевидна.

Переход. Дерево T глубины h, листьев $\leqslant n$.

n_i — количество листьев в поддереве с корнем в i-й дочке корня дерева T.

Так как

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t \leqslant n,$$

то существует такой индекс i^*, что

$$\sum_{i=1}^{i^*-1} n_i \leqslant \frac{n}{2}, \quad \sum_{i=i^*+1}^{t} n_i \leqslant \frac{n}{2}.$$

Универсальность семейства $T(n, h)$

Индукция по n, h.

База — $T(n, 1)$ и $T(1, h)$ — очевидна.

Переход. Дерево T глубины h, листьев $\leqslant n$.

n_i — количество листьев в поддереве с корнем в i-й дочке корня дерева T.

Так как

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t \leqslant n,$$

то существует такой индекс i^*, что

$$\sum_{i=1}^{i^*-1} n_i \leqslant \frac{n}{2}, \quad \sum_{i=i^*+1}^{t} n_i \leqslant \frac{n}{2}.$$

Универсальность семейства $T(n, h)$

Индукция по n, h.

База — $T(n, 1)$ и $T(1, h)$ — очевидна.

Переход. Дерево T глубины h, листьев $\leqslant n$.

n_i — количество листьев в поддереве с корнем в i-й дочке корня дерева T.

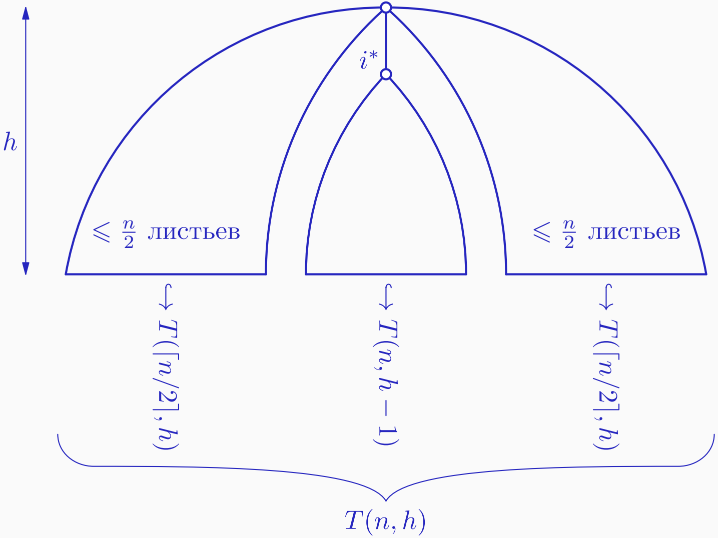
Так как

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t \leqslant n,$$

то существует такой индекс i^*, что

$$\sum_{i=1}^{i^*-1} n_i \leqslant \frac{n}{2}, \quad \sum_{i=i^*+1}^{t} n_i \leqslant \frac{n}{2}.$$

Универсальность семейства $T(n, h)$ (завершение)



Оценка размера

Теорема (M. Jurdziński, R. Lazić, 2017)

В дереве $T(n, h)$ не больше $2n\binom{\lceil \log_2 n \rceil + h - 1}{h - 1}$ листьев.

Вспомогательная функция

Определение

$$\ell(0, h) = 1, \quad \ell(q, 1) = 2^q, \quad \ell(q, h) = 2\ell(q-1, h) + \ell(q, h-1).$$

Явная формула

$$\ell(q, h) = 2^q \binom{q+h-1}{h-1}.$$

Вспомогательная функция

Определение

$$\ell(0,h) = 1, \quad \ell(q,1) = 2^q, \quad \ell(q,h) = 2\ell(q-1,h) + \ell(q,h-1).$$

Явная формула

$$\ell(q,h) = 2^q \binom{q+h-1}{h-1}.$$

Вспомогательная функция

Определение

$$\ell(0,h)=1,\quad \ell(q,1)=2^q,\quad \ell(q,h)=2\ell(q-1,h)+\ell(q,h-1).$$

Явная формула

$\ell(q,h)=2^q\binom{q+h-1}{h-1}.$

База индукции:

$$\ell(0,h)=1=2^0\binom{0+h-1}{h-1};\quad \ell(q,1)=2^q=2^q\binom{q+1-1}{1-1}.$$

Вспомогательная функция

Определение

$$\ell(0, h) = 1, \quad \ell(q, 1) = 2^q, \quad \ell(q, h) = 2\ell(q-1, h) + \ell(q, h-1).$$

Явная формула

$$\ell(q, h) = 2^q \binom{q+h-1}{h-1}.$$

Индуктивный переход:

$$\begin{aligned}
\ell(q, h) &= 2\ell(q-1, h) + \ell(q, h-1) = \\
&= 2 \cdot 2^{q-1} \binom{q-1+h-1}{h-1} + 2^q \binom{q+h-1-1}{h-1-1} = \\
&= 2^q \binom{q+h-1}{h-1}.
\end{aligned}$$

Оценка размера: доказательство индукцией по n, h

Утверждение

Количество листьев в дереве $T(n, h)$ не больше $\ell(q, h)$, $q = \lceil \log_2 n \rceil$.

$\ell(q, h) = 2^q \binom{q+h-1}{h-1}$, оценка теоремы сразу следует из утверждения.

Оценка размера: доказательство индукцией по n, h

Утверждение

Количество листьев в дереве $T(n, h)$ не больше $\ell(q, h)$, $q = \lceil \log_2 n \rceil$.

База индукции:

$$1 \leqslant \ell(0, h) = 1, \qquad n = 2^{\log_2 n} \leqslant \ell(q, 1) = 2^q = 2^{\lceil \log_2 n \rceil}.$$

Оценка размера: доказательство индукцией по n, h

Утверждение

Количество листьев в дереве $T(n, h)$ не больше $\ell(q, h)$, $q = \lceil \log_2 n \rceil$.

Индуктивный переход. По предположению индукции и построению $T(n, h)$ листьев в $T(n, h)$ не больше $2\ell(q', h) + \ell(q, h-1)$, где $q' = \lceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \rceil$.
Если $q' = q - 1$, то $2\ell(q', h) + \ell(q, h-1) = \ell(q, h)$.

Оценка размера: доказательство индукцией по n, h

Утверждение

Количество листьев в дереве $T(n, h)$ не больше $\ell(q, h)$, $q = \lceil \log_2 n \rceil$.

$$q' = \lceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \rceil \quad \Rightarrow \quad q' = q - 1.$$

Оценка размера: доказательство индукцией по n, h

Утверждение

Количество листьев в дереве $T(n, h)$ не больше $\ell(q, h)$, $q = \lceil \log_2 n \rceil$.

$q' = \lceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \rceil \quad \Rightarrow \quad q' = q - 1$.

При чётном n: $q = \lceil \log_2 n \rceil = \lceil \log_2 n/2 \rceil + 1 = q' + 1$.

Оценка размера: доказательство индукцией по n, h

Утверждение

Количество листьев в дереве $T(n, h)$ не больше $\ell(q, h)$, $q = \lceil \log_2 n \rceil$.

$q' = \lceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \rceil \quad \Rightarrow \quad q' = q - 1.$

При $n = 2s - 1$, где $s = 2^r - \Delta$, $0 \leqslant \Delta < 2^{r-1}$:

$$q' = \lceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \rceil = r,$$

Оценка размера: доказательство индукцией по n, h

Утверждение

Количество листьев в дереве $T(n, h)$ не больше $\ell(q, h)$, $q = \lceil \log_2 n \rceil$.

$q' = \lceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \rceil \quad \Rightarrow \quad q' = q - 1.$

При $n = 2s - 1$, где $s = 2^r - \Delta$, $0 \leqslant \Delta < 2^{r-1}$:

$$q' = \lceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \rceil = r,$$
$$q = \lceil \log_2 (2s - 1) \rceil = \lceil \log_2 (2^{r+1} - 2\Delta - 1) \rceil$$

Утверждение

Количество листьев в дереве $T(n, h)$ не больше $\ell(q, h)$, $q = \lceil \log_2 n \rceil$.

$q' = \lceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \rceil \quad \Rightarrow \quad q' = q - 1.$

При $n = 2s - 1$, где $s = 2^r - \Delta$, $0 \leqslant \Delta < 2^{r-1}$:

$$q' = \lceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \rceil = r,$$
$$q = \lceil \log_2 (2s - 1) \rceil = \lceil \log_2 (2^{r+1} - 2\Delta - 1) \rceil$$

Так как $1 + 2\Delta < 1 + 2^r$, то $1 + 2\Delta < 2^r$ (нечётное число не равно чётному).

Поэтому

$$q = \lceil \log_2 (2^{r+1} - 2\Delta - 1) \rceil = r + 1.$$

Квазиполиномальный алгоритм решения игр чётности

Теорема

Существует алгоритм решения игр чётности, который работает за квазиполиномиальное время от длины входа.

Доказательство

1. Приводим к $d = 2n^2$ (важны только чётности приоритетов и их порядок).
2. Из автомата на $T(n, n^2)$ строим игру достижимости.
3. Размер графа игры достижимости не больше

$$n \cdot 2n \binom{\lceil \log_2 n \rceil + n^2 - 1}{n^2 - 1} = n^{O(\log n)} = 2^{O(\log^2 n)}.$$

Квазиполиномальный алгоритм решения игр чётности

Теорема

Существует алгоритм решения игр чётности, который работает за квазиполиномиальное время от длины входа.

Доказательство

1. Приводим к $d = 2n^2$ (важны только чётности приоритетов и их порядок).
2. Из автомата на $T(n, n^2)$ строим игру достижимости.
3. Размер графа игры достижимости не больше

$$n \cdot 2n \binom{\lceil \log_2 n \rceil + n^2 - 1}{n^2 - 1} = n^{O(\log n)} = 2^{O(\log^2 n)}.$$

Квазиполиномальный алгоритм решения игр чётности

Теорема

Существует алгоритм решения игр чётности, который работает за квазиполиномиальное время от длины входа.

Доказательство

1. Приводим к $d = 2n^2$ (важны только чётности приоритетов и их порядок).
2. Из автомата на $T(n, n^2)$ строим игру достижимости.
3. Размер графа игры достижимости не больше

$$n \cdot 2n\binom{\lceil \log_2 n \rceil + n^2 - 1}{n^2 - 1} = n^{O(\log n)} = 2^{O(\log^2 n)}.$$

Теорема

Существует алгоритм решения игр чётности, который работает за квазиполиномиальное время от длины входа.

Доказательство

1. Приводим к $d = 2n^2$ (важны только чётности приоритетов и их порядок).
2. Из автомата на $T(n, n^2)$ строим игру достижимости.
3. Размер графа игры достижимости не больше

$$n \cdot 2n \binom{\lceil \log_2 n \rceil + n^2 - 1}{n^2 - 1} = n^{O(\log n)} = 2^{O(\log^2 n)}.$$

Субэкспоненциальные алгоритмы для циклических игр

Общая идея

$(G, V_0 \sqcup V_1, w)$ — циклическая игра, в графе игры n вершин.

1. Ищем оптимальную позиционную стратегию Макса. (Она оптимальна сразу для всех начальных позиций графа игры.)
2. Проверяем оптимальность текущей стратегии.
3. Если не оптимальна, есть возможность локального улучшения (изменения стратегии в одной позиции).
4. Нужны удачные правила перебора.

Алгоритм Björklund, Vorobyov (2007)

Реализует описанную выше идею. Алгоритм вероятностный. С вероятностью ошибки ε находит решение циклической игры за время $\varepsilon^{-1} \exp\left(O(\sqrt{n} \ln n)\right)$.

Общая идея

$(G, V_0 \sqcup V_1, w)$ — циклическая игра, в графе игры n вершин.

1. Ищем оптимальную позиционную стратегию Макса. (Она оптимальна сразу для всех начальных позиций графа игры.)
2. Проверяем оптимальность текущей стратегии.
3. Если не оптимальна, есть возможность локального улучшения (изменения стратегии в одной позиции).
4. Нужны удачные правила перебора.

Алгоритм Björklund, Vorobyov (2007)

Реализует описанную выше идею. Алгоритм вероятностный. С вероятностью ошибки ε находит решение циклической игры за время $\varepsilon^{-1} \exp\left(O(\sqrt{n} \ln n)\right)$.

Общая идея

$(G, V_0 \sqcup V_1, w)$ — циклическая игра, в графе игры n вершин.

1. Ищем оптимальную позиционную стратегию Макса. (Она оптимальна сразу для всех начальных позиций графа игры.)
2. Проверяем оптимальность текущей стратегии.
3. Если не оптимальна, есть возможность локального улучшения (изменения стратегии в одной позиции).
4. Нужны удачные правила перебора.

Алгоритм Björklund, Vorobyov (2007)

Реализует описанную выше идею. Алгоритм вероятностный. С вероятностью ошибки ε находит решение циклической игры за время $\varepsilon^{-1} \exp\left(O(\sqrt{n} \ln n)\right)$.

Общая идея

$(G, V_0 \sqcup V_1, w)$ — циклическая игра, в графе игры n вершин.

1. Ищем оптимальную позиционную стратегию Макса. (Она оптимальна сразу для всех начальных позиций графа игры.)
2. Проверяем оптимальность текущей стратегии.
3. Если не оптимальна, есть возможность локального улучшения (изменения стратегии в одной позиции).
4. Нужны удачные правила перебора.

Алгоритм Björklund, Vorobyov (2007)

Реализует описанную выше идею. Алгоритм вероятностный. С вероятностью ошибки ε находит решение циклической игры за время $\varepsilon^{-1} \exp\left(O(\sqrt{n}\ln n)\right)$.

Общая идея

$(G, V_0 \sqcup V_1, w)$ — циклическая игра, в графе игры n вершин.

1. Ищем оптимальную позиционную стратегию Макса. (Она оптимальна сразу для всех начальных позиций графа игры.)
2. Проверяем оптимальность текущей стратегии.
3. Если не оптимальна, есть возможность локального улучшения (изменения стратегии в одной позиции).
4. Нужны удачные правила перебора.

Алгоритм Björklund, Vorobyov (2007)

Реализует описанную выше идею. Алгоритм вероятностный. С вероятностью ошибки ε находит решение циклической игры за время $\varepsilon^{-1} \exp\big(O(\sqrt{n} \ln n)\big)$.

Препроцессинг

1. Добиваемся, чтобы цена игры в любой позиции не равнялась 0. (Замена весов $w'(u,v) = 2nw(u,v) - 1$ сохраняет знаки и делает цены ненулевыми.)
2. Исключаем те вершины Мина, из которых тот может только своими ходами выйти на цикл отрицательного веса. В таких позициях цена отрицательная.

Модифицированная игра

Добавляем терминальную позицию $\triangle$ (в которой есть петля нулевого веса) и ходы в $\triangle$ из каждой позиции Макса.

Преобразование игры

Препроцессинг

1. Добиваемся, чтобы цена игры в любой позиции не равнялась 0. (Замена весов $w'(u,v) = 2nw(u,v) - 1$ сохраняет знаки и делает цены ненулевыми.)
2. Исключаем те вершины Мина, из которых тот может только своими ходами выйти на цикл отрицательного веса. В таких позициях цена отрицательная.

Модифицированная игра

Добавляем терминальную позицию $\triangle$ (в которой есть петля нулевого веса) и ходы в $\triangle$ из каждой позиции Макса.

Преобразование игры

Препроцессинг

1. Добиваемся, чтобы цена игры в любой позиции не равнялась 0. (Замена весов $w'(u,v) = 2nw(u,v) - 1$ сохраняет знаки и делает цены ненулевыми.)
2. Исключаем те вершины Мина, из которых тот может только своими ходами выйти на цикл отрицательного веса. В таких позициях цена отрицательная.

Модифицированная игра

Добавляем терминальную позицию $\triangle$ (в которой есть петля нулевого веса) и ходы в $\triangle$ из каждой позиции Макса.

Свойства модифицированной игры

1. При сделанных предположениях цена любой позиции неотрицательная (Макс может всегда уйти в терминал).
2. Если в исходной игре для некоторой начальной позиции v цена положительная, то и в модифицированной игре цена позиции v положительная (Макс может игнорировать ходы в терминал).

Свойства модифицированной игры

1. При сделанных предположениях цена любой позиции неотрицательная (Макс может всегда уйти в терминал).
2. Если в исходной игре для некоторой начальной позиции v цена положительная, то и в модифицированной игре цена позиции v положительная (Макс может игнорировать ходы в терминал).

Мера успешности стратегии

$x\colon V_1 \to V \cup \{\triangle\}$ — стратегия Макса.

G_x — стратегический граф (из ходов Макса оставлены только входящие в стратегию x).

«Расстояние до терминала»

$\rho(x)_v$ — минимально возможная сумма весов рёбер в партии на графе G_x, начинающейся в v.

Вектор $(\rho(x)_v,\ v \in V)$ будем считать мерой успешности стратегии x.

Сравнение векторов покоординатное: $\rho' \leqslant \rho''$, если $\rho'_i \leqslant \rho''_i$ для всех i. (Порядок частичный.)

Мера успешности стратегии

$x\colon V_1 \to V \cup \{\triangle\}$ — стратегия Макса.

G_x — стратегический граф (из ходов Макса оставлены только входящие в стратегию x).

«Расстояние до терминала»

$\rho(x)_v$ — минимально возможная сумма весов рёбер в партии на графе G_x, начинающейся в v.

Вектор $(\rho(x)_v,\ v \in V)$ будем считать мерой успешности стратегии x.

Сравнение векторов покоординатное: $\rho' \leqslant \rho''$, если $\rho'_i \leqslant \rho''_i$ для всех i. (Порядок частичный.)

Бесконечные расстояния

Свойства $\rho(x)_v$

1. Если $-\infty < \rho(x)_v < +\infty$, то $\rho(x)_v$ — вес кратчайшего пути из v в $\triangle$ по графу G_x.
2. Если $\rho(x)_v = -\infty$, то Мин может в графе G_x выйти на цикл отрицательного веса. Будем считать в этом случае кратчайшим путём любой бесконечный путь от v до цикла отрицательного веса и далее по этому циклу.
3. Если $\rho(x)_v = +\infty$, то $\triangle$ недостижима в G_x из вершины v. Считаем «кратчайшим путём» любой бесконечный путь, повторящий какой-нибудь цикл.

Бесконечные расстояния

Свойства $\rho(x)_v$

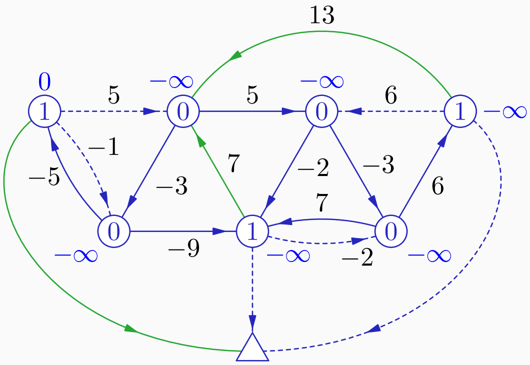
1. Если $-\infty < \rho(x)_v < +\infty$, то $\rho(x)_v$ — вес кратчайшего пути из v в $\triangle$ по графу G_x.
2. Если $\rho(x)_v = -\infty$, то Мин может в графе G_x выйти на цикл отрицательного веса. Будем считать в этом случае кратчайшим путём любой бесконечный путь от v до цикла отрицательного веса и далее по этому циклу.
3. Если $\rho(x)_v = +\infty$, то $\triangle$ недостижима в G_x из вершины v. Считаем «кратчайшим путём» любой бесконечный путь, повторящий какой-нибудь цикл.

Бесконечные расстояния

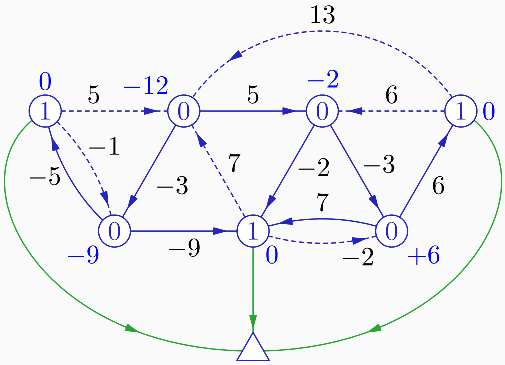
Свойства $\rho(x)_v$

1. Если $-\infty < \rho(x)_v < +\infty$, то $\rho(x)_v$ — вес кратчайшего пути из v в $\triangle$ по графу G_x.
2. Если $\rho(x)_v = -\infty$, то Мин может в графе G_x выйти на цикл отрицательного веса. Будем считать в этом случае кратчайшим путём любой бесконечный путь от v до цикла отрицательного веса и далее по этому циклу.
3. Если $\rho(x)_v = +\infty$, то $\triangle$ недостижима в G_x из вершины v. Считаем «кратчайшим путём» любой бесконечный путь, повторящий какой-нибудь цикл.

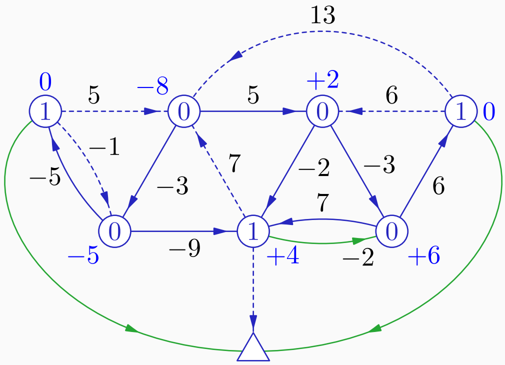
Пример


13
0
$-\infty$
$-\infty$
5
5
6
1
0
0
1
$-\infty$
-1
-5
-3
7
-2
-3
6
7
0
1
0
-9
-2
$-\infty$
$-\infty$
$-\infty$

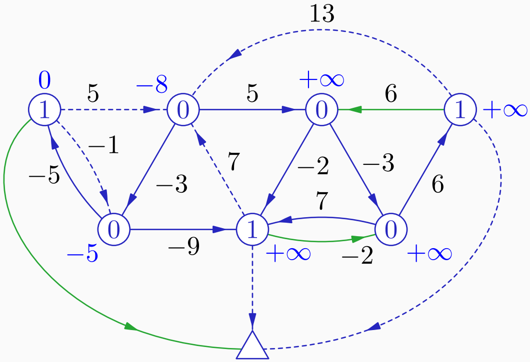
Осторожная стратегия Макса



Локальное улучшение осторожной стратегии



Ещё одно локальное улучшение

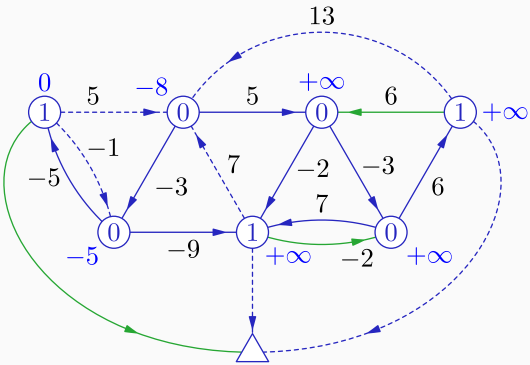


Свойства

Эту стратегию невозможно локально улучшить.

И она оптимальна.

Ещё одно локальное улучшение



Свойства

Эту стратегию невозможно локально улучшить.

И она оптимальна.

Канонические игры и сравнение стратегий

1. Покоординатный порядок инвариантен относительно сдвигов: для любого $a \in \mathbb{R}^m$ равносильны $x \leqslant y$ и $x + a \leqslant y + a$.
2. Веса всех путей от данной вершины v до терминала $\triangle$ изменяются при потенциальном преобразовании на одну и ту же величину $\varphi_\triangle - \varphi_v$.
3. Поэтому при сравнении стратегий достаточно рассматривать только канонические игры (для любой игры есть эквивалентная каноническая).

Канонические игры и сравнение стратегий

1. Покоординатный порядок инвариантен относительно сдвигов: для любого $a \in \mathbb{R}^m$ равносильны $x \leqslant y$ и $x + a \leqslant y + a$.
2. Веса всех путей от данной вершины v до терминала $\triangle$ изменяются при потенциальном преобразовании на одну и ту же величину $\varphi_\triangle - \varphi_v$.
3. Поэтому при сравнении стратегий достаточно рассматривать только канонические игры (для любой игры есть эквивалентная каноническая).

Канонические игры и сравнение стратегий

1. Покоординатный порядок инвариантен относительно сдвигов: для любого $a \in \mathbb{R}^m$ равносильны $x \leqslant y$ и $x + a \leqslant y + a$.
2. Веса всех путей от данной вершины v до терминала $\triangle$ изменяются при потенциальном преобразовании на одну и ту же величину $\varphi_\triangle - \varphi_v$.
3. Поэтому при сравнении стратегий достаточно рассматривать только канонические игры (для любой игры есть эквивалентная каноническая).

Глобальный максимум расстояний до терминала

Утверждение

В канонической модифицированной игре глобальный максимум $\rho^{\max}$ вектора расстояний до терминала задаётся соотношениями $\rho_v^{\max} = 0$, если $p(v) = 0$; $\rho_v^{\max} = +\infty$, если $p(v) > 0$. Здесь $p(v)$ — цена позиции.

Доказательство

В позициях с $p(v) > 0$ у Макса есть ход веса $p(v)$ и он не ведёт в терминал (где цена позиции 0). В соответствующей стратегии терминал недостижим. С другой стороны, в позициях с $p(v) = 0$ у Мина есть ход веса 0, а у Макса ход веса 0 максимально возможный. Поэтому расстояние от такой позиции до терминала неположительно. Оно достигается, если Макс выбирает каноническую стратегию.

Глобальный максимум расстояний до терминала

Утверждение

В канонической модифицированной игре глобальный максимум $\rho^{\max}$ вектора расстояний до терминала задаётся соотношениями $\rho_v^{\max} = 0$, если $p(v) = 0$; $\rho_v^{\max} = +\infty$, если $p(v) > 0$. Здесь $p(v)$ — цена позиции.

Доказательство

В позициях с $p(v) > 0$ у Макса есть ход веса $p(v)$ и он не ведёт в терминал (где цена позиции 0). В соответствующей стратегии терминал недостижим. С другой стороны, в позициях с $p(v) = 0$ у Мина есть ход веса 0, а у Макса ход веса 0 максимально возможный. Поэтому расстояние от такой позиции до терминала неположительно. Оно достигается, если Макс выбирает каноническую стратегию.

Локальные улучшения

Локальное улучшение стратегии x в позиции v

Такая стратегия x', что $x'(u) = x(u)$ при $u \neq v$ и $\rho'_v > \rho_v$.

Локальное улучшение увеличивает меру успешности

x' — локальное улучшение x в позиции v. Тогда $\rho(G_{x'}) > \rho(G_x)$.

Локальное улучшение стратегии x в позиции v

Такая стратегия x', что $x'(u) = x(u)$ при $u \neq v$ и $\rho'_v > \rho_v$.

Локальное улучшение увеличивает меру успешности

x' — локальное улучшение x в позиции v. Тогда $\rho(G_{x'}) > \rho(G_x)$.

Доказательство

Проверим, что $\rho(G_{x'})_u \geqslant \rho(G_x)_u$ для всех $u \in V$ (а в v неравенство строгое).

Укажем для каждого пути τ' из u в $\triangle$ по $G_{x'}$ такой путь τ из u в $\triangle$ по G_x, длина которого не больше.

1. τ' не проходит через v. Тогда $\tau = \tau'$ (этот путь есть и в G_x, и в $G_{x'}$).
2. $\tau' = \tau_1'\tau_2'$, где τ_1' — путь из u в v по $G_{x'}$, а τ_2' — путь из v в $\triangle$ по $G_{x'}$.
   Так как $\rho(x')_v > -\infty$ (локально улучшает x в v), то можно считать, что τ_1' есть и в G_x, и в $G_{x'}$ (из v недостижимы циклы отрицательного веса в $G_{x'}$).
   Пусть τ^* — кратчайший путь из v в $\triangle$ по G_x, а $\tau = \tau_1'\tau^*$. Тогда
   $|\tau| = |\tau_1'| + |\tau^*| < |\tau_1'| + |\tau_2'| = |\tau'|$.

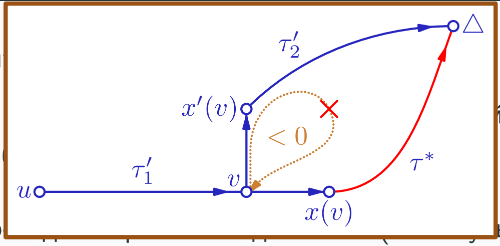
Доказательство

Проверим, что $\rho(G_{x'})_u \geqslant \rho(G_x)_u$ для всех $u \in V$ (а в v неравенство строгое).

Укажем для каждого пути τ' из u в $\triangle$ по $G_{x'}$ такой путь τ из u в $\triangle$ по G_x, длина которого не больше.

1. τ' не проходит через v. Тогда $\tau = \tau'$ (этот путь есть и в G_x, и в $G_{x'}$).
2. $\tau' = \tau'_1 \tau'_2$, где τ'_1 — путь из u в v по $G_{x'}$, а τ'_2 — путь из v в $\triangle$ по $G_{x'}$.
   Так как $\rho(x')_v > -\infty$ (локально улучшает x в v), то можно считать, что τ'_1 есть и в G_x, и в $G_{x'}$ (из v недостижимы циклы отрицательного веса в $G_{x'}$).
   Пусть τ^* — кратчайший путь из v в $\triangle$ по G_x, а $\tau = \tau'_1 \tau^*$. Тогда
   $|\tau| = |\tau'_1| + |\tau^*| < |\tau'_1| + |\tau'_2| = |\tau'|$.

Доказательство



Проверим, ч … в v неравенство строгое).

Укажем для … й путь τ из u в $\triangle$ по G_x, длина которого не (

1. τ' не пр … ь есть и в G_x, и в $G_{x'}$).
2. $\tau' = \tau_1'\tau_2'$, где τ_1' — путь из u в v по $G_{x'}$, а τ_2' — путь из v в $\triangle$ по $G_{x'}$.
   Так как $\rho(x')_v > -\infty$ (локально улучшает x в v), то можно считать, что τ_1' есть и в G_x, и в $G_{x'}$ (из v недостижимы циклы отрицательного веса в $G_{x'}$).
   Пусть τ^* — кратчайший путь из v в $\triangle$ по G_x, а $\tau = \tau_1'\tau^*$. Тогда
   $|\tau| = |\tau_1'| + |\tau^*| < |\tau_1'| + |\tau_2'| = |\tau'|$.

Локально-глобальное свойство

Теорема

Пусть стратегия x не допускает локальных улучшений. Тогда на этой стратегии достигается глобальный максимум вектора расстояний.