Алгоритмическая теория игр
Лекция 6

М.Н. Вялый

Лекции в Computer Science club (Санкт-Петербург), 2019

Игры с затухающим платежом (discounted payoff games, DPG)

Определения

Игровое поле

такое же, как в циклических играх. Кроме того, есть параметр дисконтирования $0 < \lambda < 1$.

Правила игры

такие же, как в циклических играх.

Партия игры и результат.

Партия — бесконечный путь по графу игры G

$$v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_t,\ \ldots; \quad (v_i, v_{i+1}) \in E.$$

Результат (выигрыш Макса)

$$(1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i w(v_i, v_{i+1}).$$

Конечный вариант

Игра за время T

Есть дополнительный параметр T, игра продолжается T ходов и затем вычисляется результат (конечная сумма).

Это игра на результат на конечном ациклическом графе.

Вершины: пары (v, t), где $v \in V$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Рёбра: пары пар $((u, t), (v, t+1))$, $(u, v) \in E$, $0 \leqslant t < T$ с весом $(1-\lambda)\lambda^t w(u, v)$.

Терминальные позиции — это пары (v, T). Начальная позиция — $(v_0, 0)$.

Конечный вариант

Игра за время T

Есть дополнительный параметр T, игра продолжается T ходов и затем вычисляется результат (конечная сумма).

Это игра на результат на конечном ациклическом графе.

Вершины: пары (v, t), где $v \in V$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Рёбра: пары пар $\big((u, t), (v, t+1)\big)$, $(u, v) \in E$, $0 \leqslant t < T$ с весом $(1-\lambda)\lambda^t w(u, v)$.

Терминальные позиции — это пары (v, T). Начальная позиция — $(v_0, 0)$.

Рекуррентные соотношения для цены конечной игры

$\mathrm{val}(v, t)$ — цена конечной игры в позиции (v, t).

$$
\begin{aligned}
\mathrm{val}(v, T) &= 0; \\
\mathrm{val}(u, t) &= \min_{v:(u,v)\in E} \big((1-\lambda)\lambda^t w(u, v) + \mathrm{val}(v, t+1)\big), \\
&\qquad \text{если } u \in V_0,\ 0 \leqslant t < T; \\
\mathrm{val}(u, t) &= \max_{v:(u,v)\in E} \big((1-\lambda)\lambda^t w(u, v) + \mathrm{val}(v, t+1)\big), \\
&\qquad \text{если } u \in V_1,\ 0 \leqslant t < T.
\end{aligned}
$$

Другой способ определить цену конечной игры

Отображение пересчёта цены $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Координаты индексированы вершинами графа.

$$f(x)_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

Лемма

$\mathrm{val}_T(v) = f^{(T)}(0^n)_v$, здесь $\mathrm{val}_T(v)$ — цена игры с затуханием длительности T, начинающейся в вершине v.

Другой способ определить цену конечной игры

Отображение пересчёта цены $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Координаты индексированы вершинами графа.

$$f(x)_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

Лемма

$\mathrm{val}_T(v) = f^{(T)}(0^n)_v$, здесь $\mathrm{val}_T(v)$ — цена игры с затуханием длительности T, начинающейся в вершине v.

Доказательство леммы: индукция по числу шагов

Пусть лемма верна для T. Рекурренты для $t = 0$:

$$\mathrm{val}_{T+1}(u) = \min_{v:(u,v)\in E} \big((1-\lambda)w(u,v) + \lambda\,\mathrm{val}_T(v)\big), \quad u \in V_0;$$

$$\mathrm{val}_{T+1}(u) = \max_{v:(u,v)\in E} \big((1-\lambda)w(u,v) + \lambda\,\mathrm{val}_T(v)\big), \quad u \in V_1.$$

Множитель λ возникает из-за того, что в этих формулах мы должны считать цену игры от 1 до $T+1$, а не от 0 до T.

Поэтому $\mathrm{val}_{T+1} = f(\mathrm{val}_T) = f^{(T+1)}(0^n)$, что и требовалось.

Доказательство леммы: индукция по числу шагов

Пусть лемма верна для T. Рекурренты для $t = 0$:

$$\mathrm{val}_{T+1}(u) = \min_{v:(u,v)\in E} \big((1-\lambda)w(u,v) + \lambda\,\mathrm{val}_T(v)\big), \quad u \in V_0;$$

$$\mathrm{val}_{T+1}(u) = \max_{v:(u,v)\in E} \big((1-\lambda)w(u,v) + \lambda\,\mathrm{val}_T(v)\big), \quad u \in V_1.$$

Множитель λ возникает из-за того, что в этих формулах мы должны считать цену игры от 1 до $T+1$, а не от 0 до T.

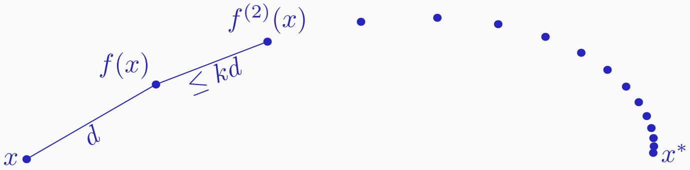
Поэтому $\mathrm{val}_{T+1} = f(\mathrm{val}_T) = f^{(T+1)}(0^n)$, что и требовалось.

Теорема

Пусть отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — сжимающее отображение относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$, то есть для некоторого $0 < k < 1$ и для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|.$$

Тогда у отображения f есть единственная неподвижная точка x^* и для любого $x \in \mathbb{R}^n$ последовательность итераций $f^{(n)}(x)$ сходится к x^*.



Отображение пересчёта цены сжимающее

Лемма

Отображение f сжимающее относительно нормы ℓ_∞,

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

$$f(x)_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda)w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda)w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

Доказательство сжимаемости

Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $i \in V_1$ обозначим

$$\ell = \arg\max_j(\lambda x_j + (1-\lambda)w(i,j)) \quad k = \arg\max_j(\lambda y_j + (1-\lambda)w(i,j))$$

$$f(x)_i - f(y)_i = \max_{(ij)\in E}(\lambda x_j + (1-\lambda)w(ij)) - \max_{(ij)\in E}(\lambda y_j + (1-\lambda)w(ij)),$$

влечёт

$$\begin{aligned} f(x)_i - f(y)_i &\leqslant (\lambda x_\ell + (1-\lambda)w(i,\ell)) - (\lambda y_\ell + (1-\lambda)w(i,\ell)) \\ &= \lambda(x_\ell - y_\ell); \\ f(x)_i - f(y)_i &\geqslant (\lambda x_k + (1-\lambda)w(i,k)) - (\lambda y_k + (1-\lambda)w(i,k)) \\ &= \lambda(x_k - y_k), \end{aligned}$$

Значит, $|f(x)_i - f(y)_i| \leqslant \lambda\|x-y\|_\infty$. Аналогично для $i \in V_0$.

Доказательство сжимаемости

Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $i \in V_1$ обозначим

$\ell = \arg\max_j (\lambda x_j + (1-\lambda) w(i,j))$ $\quad k = \arg\max_j (\lambda y_j + (1-\lambda) w(i,j))$

$$f(x)_i - f(y)_i = \max_{(ij)\in E} (\lambda x_j + (1-\lambda) w(ij)) - \max_{(ij)\in E} (\lambda y_j + (1-\lambda) w(ij)),$$

влечёт

$$\begin{aligned} f(x)_i - f(y)_i &\leqslant (\lambda x_\ell + (1-\lambda) w(i,\ell)) - (\lambda y_\ell + (1-\lambda) w(i,\ell)) \\ &= \lambda (x_\ell - y_\ell); \\ f(x)_i - f(y)_i &\geqslant (\lambda x_k + (1-\lambda) w(i,k)) - (\lambda y_k + (1-\lambda) w(i,k)) \\ &= \lambda (x_k - y_k), \end{aligned}$$

Значит, $|f(x)_i - f(y)_i| \leqslant \lambda \|x - y\|_\infty$. Аналогично для $i \in V_0$.

Доказательство сжимаемости

Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $i \in V_1$ обозначим

$\ell = \arg\max_j(\lambda x_j + (1-\lambda)w(i,j)) \quad k = \arg\max_j(\lambda y_j + (1-\lambda)w(i,j))$

$$f(x)_i - f(y)_i = \max_{(ij)\in E}(\lambda x_j + (1-\lambda)w(ij)) - \max_{(ij)\in E}(\lambda y_j + (1-\lambda)w(ij)),$$

влечёт

$$\begin{aligned} f(x)_i - f(y)_i &\leqslant (\lambda x_\ell + (1-\lambda)w(i,\ell)) - (\lambda y_\ell + (1-\lambda)w(i,\ell)) \\ &= \lambda(x_\ell - y_\ell); \\ f(x)_i - f(y)_i &\geqslant (\lambda x_k + (1-\lambda)w(i,k)) - (\lambda y_k + (1-\lambda)w(i,k)) \\ &= \lambda(x_k - y_k), \end{aligned}$$

Значит, $|f(x)_i - f(y)_i| \leqslant \lambda\|x-y\|_\infty$. Аналогично для $i \in V_0$.

Вектор цен: неподвижная точка отображения пересчёта

Утверждение

Пусть $\mathrm{val} = f(\mathrm{val})$. Тогда val_i является ценой позиции i и эта цена гарантируется позиционными стратегиями Макса и Мина.

Доказательство

$$\mathrm{val}_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} (\lambda \,\mathrm{val}_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} (\lambda \,\mathrm{val}_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

$s(i) = \arg\max(\cdot)$ для $i \in V_1$ или $s(i) = \arg\min(\cdot)$ для $i \in V_0$.

Функция $s(\cdot)$ задаёт пару стратегий $s_0(\cdot)$, $s_1(\cdot)$ для Мина и Макса.

Вектор цен: неподвижная точка отображения пересчёта

Утверждение

Пусть $\mathrm{val} = f(\mathrm{val})$. Тогда val_i является ценой позиции i и эта цена гарантируется позиционными стратегиями Макса и Мина.

Доказательство

$$\mathrm{val}_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} (\lambda\,\mathrm{val}_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} (\lambda\,\mathrm{val}_j + (1-\lambda) w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

$s(i) = \arg\max(\cdot)$ для $i \in V_1$ или $s(i) = \arg\min(\cdot)$ для $i \in V_0$.

Функция $s(\cdot)$ задаёт пару стратегий $s_0(\cdot)$, $s_1(\cdot)$ для Мина и Макса.

Продолжение доказательства

Макс придерживается s_1, игра начинается из v_0. Из условия неподвижной точки получаем для каждого хода (i,j) партии неравенство

$$\mathrm{Val}_i \leqslant \lambda \,\mathrm{Val}_j + (1-\lambda) w(i,j)$$

(на ходе Макса оно обращается в равенство). Отсюда

$$(1-\lambda)\sum_{i=0}^{T-1} \lambda^i w(v_i, v_{i+1}) \geqslant \sum_{i=0}^{T-1} \lambda^i \left(\mathrm{Val}_{v_i} - \lambda \,\mathrm{Val}_{v_{i+1}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \mathrm{val}_{v_0} - \lambda^T \mathrm{val}_{v_T}.$$

Переходя к пределу при $T \to \infty$, получаем неравенство для результата партии: он не меньше val_{v_0}.

Аналогично рассуждаем для Мина, придерживающегося стратегии s_0.

Продолжение доказательства

Макс придерживается s_1, игра начинается из v_0. Из условия неподвижной точки получаем для каждого хода (i, j) партии неравенство

$$\mathrm{Val}_i \leqslant \lambda \, \mathrm{Val}_j + (1-\lambda) w(i, j)$$

(на ходе Макса оно обращается в равенство). Отсюда

$$(1-\lambda) \sum_{i=0}^{T-1} \lambda^i w(v_i, v_{i+1}) \geqslant \sum_{i=0}^{T-1} \lambda^i \left(\mathrm{Val}_{v_i} - \lambda \, \mathrm{Val}_{v_{i+1}} \right) \geqslant$$
$$\geqslant \mathrm{val}_{v_0} - \lambda^T \, \mathrm{val}_{v_T} .$$

Переходя к пределу при $T \to \infty$, получаем неравенство для результата партии: он не меньше val_{v_0}.

Аналогично рассуждаем для Мина, придерживающегося стратегии s_0.

От сжимающих отображений к нерастягивающим

Конечный вариант циклических игр

Определяется аналогично случаю игр с затухающими платежами.

Результат с точностью до $1/T$ равен сумме весов ходов партии.

Рекурренты для цен конечной игры

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}(v, T) &= 0; \\
\mathrm{val}(u, t) &= \min_{v:(u,v)\in E} \big(w(u, v) + \mathrm{val}(v, t + 1)\big), \\
&\qquad \text{если } u \in V_0,\ 0 \leqslant t < T; \\
\mathrm{val}(u, t) &= \max_{v:(u,v)\in E} \big(w(u, v) + \mathrm{val}(v, t + 1)\big), \\
&\qquad \text{если } u \in V_1,\ 0 \leqslant t < T.
\end{aligned}$$

Отображение пересчёта цен для MPG

$$f(x)_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} (x_j + w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} (x_j + w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

Лемма

$\mathrm{val}_T(v) = f^{(T)}(0^n)_v$, здесь $\mathrm{val}_T(v)$ — цена циклический игры длительности T, начинающейся в вершине v.

Доказательство полностью аналогично предыдущему.

Отображение пересчёта цен для MPG нерастягивающее

Лемма

Отображение f нерастягивающее, то есть

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leqslant \|x - y\|_\infty \quad \text{для любых } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство аналогично предыдущему

Для $i \in V_1$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$\ell = \arg\max_j (x_j + w(i,j))$; $k = \arg\max_j (y_j + w(i,j))$.

$$f(x)_i - f(y)_i = \max_{(ij) \in E} (x_j + w(i,j)) - \max_{(ij) \in E} (y_j + w(i,j))$$

влечёт

$$f(x)_i - f(y)_i \leqslant (x_\ell + w(i,\ell)) - (y_\ell + w(i,\ell)) = x_\ell - y_\ell,$$

$$f(x)_i - f(y)_i \geqslant (x_k + w(i,k)) - (y_k + w(i,k)) = x_k - y_k.$$

Отображение пересчёта цен для MPG нерастягивающее

Лемма

Отображение f нерастягивающее, то есть

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leqslant \|x - y\|_\infty \quad \text{для любых } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство аналогично предыдущему

Для $i \in V_1$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$\ell = \arg\max\limits_j (x_j + w(i,j))$; $k = \arg\max\limits_j (y_j + w(i,j))$.

$$f(x)_i - f(y)_i = \max_{(ij)\in E} (x_j + w(i,j)) - \max_{(ij)\in E} (y_j + w(i,j))$$

влечёт

$$f(x)_i - f(y)_i \leqslant (x_\ell + w(i,\ell)) - (y_\ell + w(i,\ell)) = x_\ell - y_\ell,$$

$$f(x)_i - f(y)_i \geqslant (x_k + w(i,k)) - (y_k + w(i,k)) = x_k - y_k.$$

Нерастягивающее отображение без неподвижной точки

Параллельный перенос: $T(x) = x + a$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Теорема об инвариантном луче (Kohlberg, 1980)

Пусть отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нерастягивающее:

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\| \quad \text{для любых } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть также f — кусочно-линейное, то есть для некоторого разбиения пространства на конечное число полиэдров $\{x : C_j x \geqslant d_j\}$ отображение f аффинное на каждом полиэдре разбиения: $f(x) = A_j x + b_j$, если $C_j x \geqslant d_j$.

Тогда существуют (единственный) $a \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^n$ такие, что $f(b + at) = b + a(t + 1)$.

Теорема Колберга

Нерастягивающее отображение без неподвижной точки

Параллельный перенос: $T(x) = x + a$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Теорема об инвариантном луче (Kohlberg, 1980)

Пусть отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нерастягивающее:

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\| \quad \text{для любых } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть также f — кусочно-линейное, то есть для некоторого разбиения пространства на конечное число полиэдров $\{x : C_j x \geqslant d_j\}$ отображение f аффинное на каждом полиэдре разбиения: $f(x) = A_j x + b_j$, если $C_j x \geqslant d_j$.

Тогда существуют (единственный) $a \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^n$ такие, что $f(b + at) = b + a(t + 1)$.

Следствия

Следствие 1

Пусть отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нерастягивающее относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$. Тогда существует такой единственный $a \in \mathbb{R}^n$, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ последовательность $f^{(n)}(x) - na$ ограничена.

Следствие 2

Пусть отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нерастягивающее относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ последовательность $f^{(n)}(x)/n$ сходится к одному и тому же вектору a.

Более того, f имеет неподвижную точку тогда и только тогда, когда $a = 0$.

Теорема о канонической игре из теоремы Колберга

Теорема о канонических формах (повторение)

Каноническая форма задаётся такими функциями $p\colon V \to \mathbb{R}$ и $s\colon V \to V$, что:

1. s задаёт пару позиционных стратегий игроков;
2. стратегии s сохраняют цену, то есть $p(s(i)) = p(i)$ для всех $i \in V$;
3. вес стратегического ребра совпадает с ценой концов ребра;
4. стратегическое ребро локально лучшее;
5. у Макса нет ходов, увеличивающих цену $p(v)$; у Мина нет ходов, уменьшающих цену.

Теорема

Каждую циклическую игру потенциальным преобразованием $w \mapsto w + d\varphi$ можно привести к канонической форме.

Теорема Колберга для отображения пересчёта цен

Отображение пересчёта цен кусочно-линейное

Отображение

$$f(x)_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E}(x_j + w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E}(x_j + w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

аффинно на полиэдрах, которые задают упорядочения $x_j + w_{ij}$ в соседях каждой вершины.

По теореме Колберга у f есть инвариантный луч $b + pt$: $f(b + pt) = b + p(t + 1)$.

Любой луч $(b + pT) + pt$ (сдвиг луча $b + pt$) также инвариантен для отображения f.

Теорема Колберга для отображения пересчёта цен

Отображение пересчёта цен кусочно-линейное

Отображение

$$f(x)_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E}(x_j + w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E}(x_j + w(i,j)), & \text{если } i \in V_0. \end{cases}$$

аффинно на полиэдрах, которые задают упорядочения $x_j + w_{ij}$ в соседях каждой вершины.

По теореме Колберга у f есть инвариантный луч $b + pt$: $f(b + pt) = b + p(t + 1)$.

Любой луч $(b + pT) + pt$ (сдвиг луча $b + pt$) также инвариантен для отображения f.

Подходящий сдвиг луча

Условия инвариантности: для любого $t \geqslant 0$

$$(b + p(t+1))_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} ((b+pt)_j + w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} ((b+pt)_j + w(i,j)), & \text{если } i \in V_0 \end{cases}$$

Наблюдение

Можно выбрать такое T, что при всех $t \geqslant T$ для каждого i максимум (минимум) достигается на одном и том же соседе $s(i)$ вершины i.

Далее считаем без ограничения общности, что $T = 0$.

Подходящий сдвиг луча

Условия инвариантности: для любого $t \geqslant 0$

$$(b + p(t+1))_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} ((b+pt)_j + w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} ((b+pt)_j + w(i,j)), & \text{если } i \in V_0 \end{cases}$$

Наблюдение

Можно выбрать такое T, что при всех $t \geqslant T$ для каждого i максимум (минимум) достигается на одном и том же соседе $s(i)$ вершины i.

Далее считаем без ограничения общности, что $T = 0$.

Подходящий сдвиг луча

Условия инвариантности: для любого $t \geqslant 0$

$$(b + p(t+1))_i = \begin{cases} \max\limits_{(ij)\in E} ((b+pt)_j + w(i,j)), & \text{если } i \in V_1; \\ \min\limits_{(ij)\in E} ((b+pt)_j + w(i,j)), & \text{если } i \in V_0 \end{cases}$$

Наблюдение

Можно выбрать такое T, что при всех $t \geqslant T$ для каждого i максимум (минимум) достигается на одном и том же соседе $s(i)$ вершины i.

Далее считаем без ограничения общности, что $T = 0$.

Параметры канонической игры

Утверждение

Игра с весовой функцией $w' = w + db$ является канонической с функцией цены p и стратегической функцией s.

Нужно проверить:

1. Корректность s (очевидна из построения).
2. Стратегия s сохраняет цену.
3. Вес стратегического ребра совпадает с ценой концов ребра.
4. Стратегическое ребро локально лучшее.
5. Любой ход не улучшает цену игры для данного игрока.

Сохранение цены и веса стратегических рёбер

Пусть $i \in V$, обозначаем $k = s(i)$. Для всех $t \geqslant 0$

$$b_k + p_k t + w(i, k) = b_i + p_i(t + 1) = b_i + p_i t + p_i,$$

откуда $p_k = p_i = w(i, k) + b_k - b_i = (w + db)(i, k) = w'(i, k)$.

Проверка остальных свойств

Пусть $i \in V_1$, обозначаем $k = s(i)$. Для любого другого соседа j вершины i при всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$b_k + p_k t + w(i,k) \geqslant b_j + p_j t + w(i,j),$$

из которого следуют неравенства $p_j \leqslant p_k$ (ход не улучшает цену игры) и $w'(i,j) = w(i,j) + b_j - b_i \leqslant w(i,k) + b_k - b_i = w'(i,k)$ (стратегическое ребро локально лучшее).

Аналогично для $i \in V_0$.

Доказательство теоремы Колберга и следствий

Дисконтированное отображение

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нерастягивающее отображение.

Дисконтированное отображение

$$F_t(x) = \frac{1}{1 + 1/t} f(x), \quad t > 0,$$

сжимающее с коэффициентом $t/(t+1) < 1$.

x_t — неподвижная точка F_t, то есть

$$f(x_t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right) x_t.$$

Упражнение

Докажите для любого нерастягивающего отображения f, что если множество x_t ограничено, то у f есть неподвижная точка $x^* = f(x^*)$.

Дисконтированное отображение

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нерастягивающее отображение.

Дисконтированное отображение

$$F_t(x) = \frac{1}{1 + 1/t} f(x), \quad t > 0,$$

сжимающее с коэффициентом $t/(t+1) < 1$.

x_t — неподвижная точка F_t, то есть

$$f(x_t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right) x_t.$$

Упражнение

Докажите для любого нерастягивающего отображения f, что если множество x_t ограничено, то у f есть неподвижная точка $x^* = f(x^*)$.

В поисках инвариантного луча

Пусть множество x_t неограничено. Рассмотрим центральные проекции u_t точек x_t на единичную сферу $S_1 = \{x : \|x\| = 1\}$. Это множество ограничено и потому у него есть предельная точка u^*. Естественно предположить, что это и есть направление инвариантного луча для отображения f.

Однако извлечь отсюда доказательство теоремы Колберга невозможно.

Задача

Постройте пример нерастягивающего отображения, для которого теорема Колберга не выполняется.

В поисках инвариантного луча

Пусть множество x_t неограничено. Рассмотрим центральные проекции u_t точек x_t на единичную сферу $S_1 = \{x : \|x\| = 1\}$. Это множество ограничено и потому у него есть предельная точка u^*. Естественно предположить, что это и есть направление инвариантного луча для отображения f.

Однако извлечь отсюда доказательство теоремы Колберга невозможно.

Задача

Постройте пример нерастягивающего отображения, для которого теорема Колберга не выполняется.

Расширение поля действительных чисел

Поле рациональных функций $\mathbb{R}(t)$

Элемент поля $\mathbb{R}(t)$ представляется отношением двух многочленов $p(t)/q(t)$, $q(t) \neq 0(t)$.

Операции как обычно с дробями.

Упорядочение поля $\mathbb{R}(t)$

Знак $p(t)/q(t)$ одинаков для всех достаточно больших t.

Считаем, что $p(t)/q(t) \in \mathbb{R}(t)$ положительная, если $p(t)/q(t) > 0$ для всех достаточно больших t.

$f(t) > g(t)$, если $f(t) - g(t) > 0$.

Поле $\mathbb{R}(t)$ упорядоченное

Упражнение

Проверьте, что заданный порядок на $\mathbb{R}(t)$ согласован с операциями в поле в обычном смысле: (1) если $f \geqslant g$, то $f + h \geqslant g + h$ для любого h; (2) если $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$, то $fg \geqslant 0$.

Над упорядоченным полем определены линейные неравенства.

Утверждение

Кусочно-линейное отображение f из теоремы Колберга продолжается до кусочно-линейного отображения $\tilde{f}\colon \mathbb{R}(t)^n \to \mathbb{R}(t)^n$ векторного пространства над полем рациональных функций.

Существенно, что знак рациональной функции $x(t)$ совпадает со знаком чисел $x(a)$ при достаточно больших a.

Поле $\mathbb{R}(t)$ упорядоченное

Упражнение

Проверьте, что заданный порядок на $\mathbb{R}(t)$ согласован с операциями в поле в обычном смысле: (1) если $f \geqslant g$, то $f + h \geqslant g + h$ для любого h; (2) если $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$, то $fg \geqslant 0$.

Над упорядоченным полем определены линейные неравенства.

Утверждение

Кусочно-линейное отображение f из теоремы Колберга продолжается до кусочно-линейного отображения $\tilde{f} \colon \mathbb{R}(t)^n \to \mathbb{R}(t)^n$ векторного пространства над полем рациональных функций.

Существенно, что знак рациональной функции $x(t)$ совпадает со знаком чисел $x(a)$ при достаточно больших a.

Основная лемма

Лемма

Дисконтированное уравнение

$$\tilde{f}(x) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)x$$

имеет решение в пространстве $\mathbb{R}(t)^n$ над полем рациональных функций от одной переменной.

Другими словами, у дисконтированного отображения $\tilde{F}$, продолженного на пространство $\mathbb{R}(t)^n$, есть неподвижная точка.

Теорема Колберга из основной леммы

$x(t) = p(t)/q(t) \in \mathbb{R}(t)^n$ неподвижная точка $\tilde{F}$:

$$\tilde{f}\big(x(t)\big) = \Big(1 + \frac{1}{t}\Big)x(t).$$

У $F_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ единственная неподвижная точка x_t.

Поэтому $x(t) = x_t$ для всех достаточно больших t.

Теорема Колберга из основной леммы

$x(t) = p(t)/q(t) \in \mathbb{R}(t)^n$ неподвижная точка $\tilde{F}$:

$$\tilde{f}(x(t)) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)x(t).$$

У $F_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ единственная неподвижная точка x_t.

Поэтому $x(t) = x_t$ для всех достаточно больших t.

Инвариантный луч из неподвижной точки

Утверждение

Для разложения в ряд Лорана в окрестности ∞

$$x(t) = p(t)/q(t) = \sum_{-\infty}^{N} a_i t^i, \qquad a_i \in \mathbb{R}^n, \quad N = \deg p(t) - \deg q(t).$$

выполняется $N \leqslant 1$.

Доказательство

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)\|x_t\| - \|f(0)\| = \|f(x_t)\| - \|f(0)\| \leqslant \|f(x_t) - f(0)\| \leqslant \|x_t - 0\| = \|x_t\|,$$

то есть $\|x_t\| \leqslant \|f(0)\| \cdot t$.

Инвариантный луч: $a_0 + a_1 t$ (при достаточно больших t).

Инвариантный луч из неподвижной точки

Утверждение

Для разложения в ряд Лорана в окрестности ∞

$$x(t) = p(t)/q(t) = \sum_{-\infty}^{N} a_i t^i, \qquad a_i \in \mathbb{R}^n, \quad N = \deg p(t) - \deg q(t).$$

выполняется $N \leqslant 1$.

Доказательство

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)\|x_t\| - \|f(0)\| = \|f(x_t)\| - \|f(0)\| \leqslant \|f(x_t) - f(0)\| \leqslant \|x_t - 0\| = \|x_t\|,$$

то есть $\|x_t\| \leqslant \|f(0)\| \cdot t$.

Инвариантный луч: $a_0 + a_1 t$ (при достаточно больших t).

Инвариантный луч из неподвижной точки

Утверждение

Для разложения в ряд Лорана в окрестности ∞

$$x(t) = p(t)/q(t) = \sum_{-\infty}^{N} a_i t^i, \qquad a_i \in \mathbb{R}^n, \quad N = \deg p(t) - \deg q(t).$$

выполняется $N \leqslant 1$.

Доказательство

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)\|x_t\| - \|f(0)\| = \|f(x_t)\| - \|f(0)\| \leqslant \|f(x_t) - f(0)\| \leqslant \|x_t - 0\| = \|x_t\|,$$

то есть $\|x_t\| \leqslant \|f(0)\| \cdot t$.

Инвариантный луч: $a_0 + a_1 t$ (при достаточно больших t).

Доказательство инвариантности $a_0 + a_1 t$

$\|x_t - (a_0 + a_1 t)\| = o(1)$ (из ряда Лорана)

$\|f(x_t) - f(a_0 + a_1 t)\| = o(1)$ (отображение нерастягивающее)

$$f(x_t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)x_t = \left(1 + \frac{1}{t}\right)(a_0 + a_1 t + o(1)) = a_0 + a_1(t+1) + o(1),$$

$$\|f(a_0 + a_1 t) - (a_0 + a_1(t+1))\| = o(1).$$

При достаточно больших t луч $a_0 + a_1 t$ лежит в одном из полиэдров разбиения, и при таких t отображение f аффинное. Поэтому $f(a_0 + a_1 t) = a_0 + a_1(t+1)$.

Доказательство инвариантности $a_0 + a_1 t$

$\|x_t - (a_0 + a_1 t)\| = o(1)$ (из ряда Лорана)

$\|f(x_t) - f(a_0 + a_1 t)\| = o(1)$ (отображение нерастягивающее)

$$f(x_t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right) x_t = \left(1 + \frac{1}{t}\right)(a_0 + a_1 t + o(1)) = a_0 + a_1(t+1) + o(1),$$
$$\|f(a_0 + a_1 t) - (a_0 + a_1(t+1))\| = o(1).$$

При достаточно больших t луч $a_0 + a_1 t$ лежит в одном из полиэдров разбиения, и при таких t отображение f аффинное. Поэтому $f(a_0 + a_1 t) = a_0 + a_1(t+1)$.

Доказательство инвариантности $a_0 + a_1 t$

$\|x_t - (a_0 + a_1 t)\| = o(1)$ (из ряда Лорана)

$\|f(x_t) - f(a_0 + a_1 t)\| = o(1)$ (отображение нерастягивающее)

$$f(x_t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)x_t = \left(1 + \frac{1}{t}\right)(a_0 + a_1 t + o(1)) = a_0 + a_1(t+1) + o(1),$$
$$\|f(a_0 + a_1 t) - (a_0 + a_1(t+1))\| = o(1).$$

При достаточно больших t луч $a_0 + a_1 t$ лежит в одном из полиэдров разбиения, и при таких t отображение f аффинное. Поэтому $f(a_0 + a_1 t) = a_0 + a_1(t+1)$.

Единственность направления инвариантного луча

Утверждение (следствие 2 выше)

Для любого x последовательность $f^{(n)}(x)/n$ сходится к a_1.

Доказательство

Композиция нерастягивающих отображений — нерастягивающее. Поэтому

$$\|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a_0)\| = \|f^{(n)}(x) - (a_0 + na_1)\| \leqslant \|x - a_0\|.$$

Поделим на n и используем неравенство треугольника:

$$\|f^{(n)}(x)/n - a_1\| \leqslant (\|a_0\| + \|x - a_0\|)/n.$$

Единственность направления инвариантного луча

Утверждение (следствие 2 выше)

Для любого x последовательность $f^{(n)}(x)/n$ сходится к a_1.

Доказательство

Композиция нерастягивающих отображений — нерастягивающее. Поэтому

$$\|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a_0)\| = \|f^{(n)}(x) - (a_0 + na_1)\| \leqslant \|x - a_0\|.$$

Поделим на n и используем неравенство треугольника:

$$\|f^{(n)}(x)/n - a_1\| \leqslant (\|a_0\| + \|x - a_0\|)/n.$$

Доказательство следствия 1

Так как

$$\|f^{(n)}(x) - (a_0 + na_1)\| \leqslant \|x - a_0\|,$$

то для $a = a_1$ и любого $x \in \mathbb{R}^n$ последовательность $f^{(n)}(x) - na$ ограничена $\|a_0\| + \|x - a_0\|$

Если же $a \neq a_1$, то

$$\|f^{(n)}(x) - na\| \geqslant \|na_1 - na\| - \|f^{(n)}(x) - na_1\| \to \infty \quad \text{при } n \to \infty.$$

Лемма Фаркаша

Пусть $Ax \geqslant b$ — система линейных неравенств в упорядоченном поле $\Bbbk$. Эта система несовместна тогда и только тогда, когда существует такой $y \geqslant 0$, что $yA = 0$ и $yb > 0$.

В одну сторону очевидно: если существует y, удовлетворяющий условиям леммы, то сумма неравенств системы с коэффициентами y_i даёт ложное неравенство $0 \geqslant yb > 0$.

В другую сторону лемму Фаркаша можно доказать методом исключения переменных Фурье–Моцкина, который работает для любого упорядоченного поля.

Линейные неравенства над упорядоченным полем

Лемма Фаркаша

Пусть $Ax \geqslant b$ — система линейных неравенств в упорядоченном поле $\Bbbk$. Эта система несовместна тогда и только тогда, когда существует такой $y \geqslant 0$, что $yA = 0$ и $yb > 0$.

В одну сторону очевидно: если существует y, удовлетворяющий условиям леммы, то сумма неравенств системы с коэффициентами y_i даёт ложное неравенство $0 \geqslant yb > 0$.

В другую сторону лемму Фаркаша можно доказать методом исключения переменных Фурье–Моцкина, который работает для любого упорядоченного поля.

Линейные неравенства над упорядоченным полем

Лемма Фаркаша

Пусть $Ax \geqslant b$ — система линейных неравенств в упорядоченном поле $\Bbbk$. Эта система несовместна тогда и только тогда, когда существует такой $y \geqslant 0$, что $yA = 0$ и $yb > 0$.

В одну сторону очевидно: если существует y, удовлетворяющий условиям леммы, то сумма неравенств системы с коэффициентами y_i даёт ложное неравенство $0 \geqslant yb > 0$.

В другую сторону лемму Фаркаша можно доказать методом исключения переменных Фурье–Моцкина, который работает для любого упорядоченного поля.

Доказательство основной леммы: лемма Фаркаша в $\mathbb{R}(t)^n$

От противного: пусть нет решений у $\tilde{f}(x) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)x$ в $\mathbb{R}(t)^n$.

Тогда для любого полиэдра j несовместна система

$$
\begin{aligned}
&A_j x - \Big(1 + \frac{1}{t}\Big)x = -b_j, \\
&C_j x \geqslant d_j.
\end{aligned}
$$

Применим лемму Фаркаша: существуют y_j (неравенства нет), $v_j \geqslant 0$:

$$
\begin{aligned}
&y_j A_j - \Big(1 + \frac{1}{t}\Big)y_j = 0, \\
&v_j C_j = 0, \qquad\qquad -y_j b_j + v_j d_j > 0.
\end{aligned}
$$

Доказательство основной леммы: лемма Фаркаша в $\mathbb{R}(t)^n$

От противного: пусть нет решений у $\tilde{f}(x) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)x$ в $\mathbb{R}(t)^n$.

Тогда для любого полиэдра j несовместна система

$$A_j x - \left(1 + \frac{1}{t}\right)x = -b_j,$$
$$C_j x \geqslant d_j.$$

Применим лемму Фаркаша: существуют y_j (неравенства нет), $v_j \geqslant 0$:

$$y_j A_j - \left(1 + \frac{1}{t}\right)y_j = 0,$$
$$v_j C_j = 0, \qquad -y_j b_j + v_j d_j > 0.$$

Завершение доказательства: лемма Фаркаша в $\mathbb{R}^n$

При достаточно больших t для любого j выполняются соотношения

$$y_j(t)A_j - \Big(1 + \frac{1}{t}\Big)y_j(t) = 0,$$

$$v_j(t)C_j = 0, \qquad -y_j(t)b_j + v_j(t)d_j > 0.$$

По лемме Фаркаша при таких t для любого j несовместна система

$$A_jx + b_j = \Big(1 + \frac{1}{t}\Big)x,$$

$$C_jx \geqslant d_j.$$

Это противоречит существованию неподвижной точки $x_t \in \mathbb{R}^n$ отображения F_t.

Завершение доказательства: лемма Фаркаша в $\mathbb{R}^n$

При достаточно больших t для любого j выполняются соотношения

$$y_j(t)A_j - \Big(1 + \frac{1}{t}\Big)y_j(t) = 0,$$

$$v_j(t)C_j = 0, \qquad\qquad -y_j(t)b_j + v_j(t)d_j > 0.$$

По лемме Фаркаша при таких t для любого j несовместна система

$$A_jx + b_j = \Big(1 + \frac{1}{t}\Big)x,$$

$$C_jx \geqslant d_j.$$

Это противоречит существованию неподвижной точки $x_t \in \mathbb{R}^n$ отображения F_t.