

# С-ядро и значение Шепли

Илья Кацев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН

2013

## Домашнее задание

**24.**

- а. Верно ли, что любая игра банкротства является супераддитивной?
- б. Верно ли, что в игре банкротства игрок является болваном в том и только в том случае, если его вес равен 0?

## Домашнее задание

**25.** Верно ли, что любая простая (кооперативная) игра является взвешенно мажоритарной?

# Термины и обозначения

**Кооперативная игра:** пара  $(N, v)$ , где  $N$  - конечное множество игроков и  $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  - характеристическая функция, определенная для каждой коалиции  $S \subset N$ , причем величина  $v(S)$  показывает, какой выигрыш могут обеспечить себе игроки из  $S$  в результате кооперации.

## Решения кооперативных игр и их свойства

Кооперативная игра = проблема.

**Решением** называется функция  $\sigma$ , сопоставляющая каждой игре  $(N, v)$  множество "справедливых" распределений прибыли  $\sigma(N, v) \in \mathbb{R}^N$ .

Решение  $\sigma$  называется **одноточечным**, если для любой игры  $(N, v)$  выполнено  $|\sigma(N, v)| = 1$ .

## Решения кооперативных игр и их свойства

Пусть  $\mathcal{G}$  - класс игр. Тогда решение  $\sigma$  удовлетворяет какому-либо свойству из списка ниже на классе  $\mathcal{G}$ , когда это свойство выполняется для всех игр

$(N, v) \in \mathcal{G}$ . Решение  $\sigma$  на классе  $\mathcal{G}$  является

- **непустым**, если  $\sigma(N, v) \neq \emptyset$ ;

## Решения кооперативных игр и их свойства

Пусть  $\mathcal{G}$  - класс игр. Тогда решение  $\sigma$  удовлетворяет какому-либо свойству из списка ниже на классе  $\mathcal{G}$ , когда это свойство выполняется для всех игр

$(N, v) \in \mathcal{G}$ . Решение  $\sigma$  на классе  $\mathcal{G}$  является

- **непустым**, если  $\sigma(N, v) \neq \emptyset$ ;
- **эффективным**, если  $\sum_{i \in N} x_i(N, v) = v(N)$  для каждого  $x \in \sigma(N, v)$ ;

## Решения кооперативных игр и их свойства

Пусть  $\mathcal{G}$  - класс игр. Тогда решение  $\sigma$  удовлетворяет какому-либо свойству из списка ниже на классе  $\mathcal{G}$ , когда это свойство выполняется для всех игр

$(N, \nu) \in \mathcal{G}$ . Решение  $\sigma$  на классе  $\mathcal{G}$  является

- **непустым**, если  $\sigma(N, \nu) \neq \emptyset$ ;
- **эффективным**, если  $\sum_{i \in N} x_i(N, \nu) = \nu(N)$  для каждого  $x \in \sigma(N, \nu)$ ;
- **анонимным**, если  $\sigma_{\pi(i)}(\pi N, \pi \nu) = \sigma_i(N, \nu)$  для всех  $i \in N$  и произвольной инъекции  $\pi : N \rightarrow \mathcal{N}$ .



## Решения кооперативных игр и их свойства

Пусть  $\mathcal{G}$  - класс игр. Тогда решение  $\sigma$  удовлетворяет какому-либо свойству из списка ниже на классе  $\mathcal{G}$ , когда это свойство выполняется для всех игр

$(N, \nu) \in \mathcal{G}$ . Решение  $\sigma$  на классе  $\mathcal{G}$  является

- **непустым**, если  $\sigma(N, \nu) \neq \emptyset$ ;
- **эффективным**, если  $\sum_{i \in N} x_i(N, \nu) = \nu(N)$  для каждого  $x \in \sigma(N, \nu)$ ;
- **анонимным**, если  $\sigma_{\pi(i)}(\pi N, \pi \nu) = \sigma_i(N, \nu)$  для всех  $i \in N$  и произвольной инъекции  $\pi : N \rightarrow \mathcal{N}$ .
- **симметричным**, если  $x_i(N, \nu) = x_j(N, \nu)$  для любого  $x \in \sigma(N, \nu)$  и симметричных в  $(N, \nu)$  игроков  $i$  и  $j$ ;

## Решения кооперативных игр и их свойства

Пусть  $\mathcal{G}$  - класс игр. Тогда решение  $\sigma$  удовлетворяет какому-либо свойству из списка ниже на классе  $\mathcal{G}$ , когда это свойство выполняется для всех игр

$(N, v) \in \mathcal{G}$ . Решение  $\sigma$  на классе  $\mathcal{G}$  является

- **непустым**, если  $\sigma(N, v) \neq \emptyset$ ;
- **эффективным**, если  $\sum_{i \in N} x_i(N, v) = v(N)$  для каждого  $x \in \sigma(N, v)$ ;
- **анонимным**, если  $\sigma_{\pi(j)}(\pi N, \pi v) = \sigma_j(N, v)$  для всех  $i \in N$  и произвольной инъекции  $\pi : N \rightarrow \mathcal{N}$ .
- **симметричным**, если  $x_i(N, v) = x_j(N, v)$  для любого  $x \in \sigma(N, v)$  и симметричных в  $(N, v)$  игроков  $i$  и  $j$ ;
- **стандартным**, если для игры любой игры двух лиц  $(\{i, j\}, v)$

$$\sigma_i = v(\{i\}) + \frac{v(\{i, j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})}{2},$$

$$\sigma_j = v(\{j\}) + \frac{v(\{i, j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})}{2}.$$

## Решения кооперативных игр и их свойства

Решение  $\sigma$  на классе  $\mathcal{G}$  является

- **ковариантным**, если оно ковариантно относительно стратегических преобразований:

$$\sigma(N, \alpha v + \beta) = \alpha \sigma(N, v) + \beta$$

для всех  $\alpha > 0$  и  $\beta \in \mathbb{R}^N$ ;

- **непрерывным**, если из того, что  $x_n \in \sigma(N, v_n)$  и  $x_n \rightarrow x$  при  $n \rightarrow \infty$  следует, что  $x \in \sigma(N, v)$ , где  $(N, v_n)_{n=1}^{\infty}$  - последовательность игр в  $\mathcal{G}$ ,  $v_n \rightarrow v$  и  $(N, v) \in \mathcal{G}$ ;
- обладает **свойством нулевого игрока**, если  $x_i = 0$  для всех  $x \in \sigma(N, v)$ , где  $i$  - нулевой игрок в  $(N, v)$ .

Одноточечное решение  $\sigma$  на  $\mathcal{G}$  называется

- **аддитивным**, если  $\sigma_i(N, v + w) = \sigma_i(N, v) + \sigma_i(N, w)$  для любых двух таких игр  $(N, v), (N, w) \in \mathcal{G}$ , что  $(N, v + w) \in \mathcal{G}$ .

## Свойства согласованности

**Согласованность** решения  $\sigma$  означает, что если выигрыши игроков определены согласно  $\sigma$ , а зачем часть игроков покинула игру с этими выигрышами, то для оставшихся распределение согласно  $\sigma$  не изменится.

## C-ядро

Множество эффективных векторов выигрышей:

$$X(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}.$$

### Определение

*C-ядро C сопоставляет каждой игре  $(N, v)$  следующее множество векторов выигрышей  $(N, v)$ :*

$$C(N, v) = \{x \in X(N, v) : \forall S \subset N \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\}.$$

C-ядро может быть пустым.

## Выпуклые игры

Игра  $(N, v)$  является **выпуклой**, если для любых коалиций  $S, T \subset N$

$$v(S \cap T) + v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

В выпуклой игре С-ядро непусто.

# Выпуклые игры

## Теорема (Shapley, 1971)

*Если игра  $(N, v)$  выпуклая, то все векторы маргинальных вкладов лежат в  $C$ -ядре.*

# Выпуклые игры

## Теорема (Shapley, 1971)

*Если игра  $(N, v)$  выпуклая, то все векторы маргинальных вкладов лежат в  $C$ -ядре.*

## Теорема (Ichiishi, 1981)

*Если в игре  $(N, v)$  все векторы маргинальных вкладов лежат в  $C$ -ядре, то игра выпукла.*



## Сбалансированность

Набор коалиций  $\mathcal{B} \subset 2^N$  называется **сбалансированным**, если существуют такие положительные числа  $\{\lambda_S\}_{S \in \mathcal{B}}$ , что для любого элемента  $i \in N$  выполнено

$$\sum_{i \in S \in \mathcal{B}} \lambda_S = 1.$$

## Сбалансированность

Набор коалиций  $\mathcal{B} \subset 2^N$  называется **сбалансированным**, если существуют такие положительные числа  $\{\lambda_S\}_{S \in \mathcal{B}}$ , что для любого элемента  $i \in N$  выполнено

$$\sum_{i \in S \in \mathcal{B}} \lambda_S = 1.$$

**Теорема (Бондарева, 1963, Шепли, 1967)**

*Для того, чтобы С-ядро в игре  $(N, v)$  было непусто, необходимо и достаточно, чтобы для любого минимального сбалансированного набора  $\mathcal{B}$  выполнялось неравенство:*

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S v(S) \leq v(N).$$

# Значение Шепли

## Определение

Значение Шепли  $Sh$  сопоставляет каждой игре  $(N, v)$  следующий вектор выигрышей  $Sh(N, v)$ :

$$Sh_i(N, v) = \sum_{\{S \subseteq N, i \in S\}} \frac{(|N| - |S|)! (|S| - 1)!}{|N|!} (v(S) - v(S \setminus \{i\})), \quad i \in N.$$

# Значение Шепли

## Определение

Значение Шепли  $Sh$  сопоставляет каждой игре  $(N, v)$  следующий вектор выигрышей  $Sh(N, v)$ :

$$Sh_i(N, v) = \sum_{\{S \subseteq N, i \in S\}} \frac{(|N| - |S|)! (|S| - 1)!}{|N|!} (v(S) - v(S \setminus \{i\})), \quad i \in N.$$

## Теорема

Для любой игры значение Шепли является средним арифметическим векторов маргинальных вкладов в данной игре.

## Значение Шепли: аксиоматизации

### Теорема (Shapley, 1953)

*Значение Шепли является единственным одноточечным решением, обладающим свойствами аддитивности, симметричности, эффективности и свойством "болвана".*

# Значение Шепли: аксиоматизации

## Теорема (Shapley, 1953)

*Значение Шепли является единственным одноточечным решением, обладающим свойствами аддитивности, симметричности, эффективности и свойством "болвана".*

## Теорема (Keane, 1969)

*Для любой игры  $(N, v)$ ,*

$$Sh(N, v) = \arg \min_{x \in X(N, v)} \sum_{S \subset N} (|S| - 1)! (|N| - |S|)! (v(S) - x(S))^2.$$

## Значение Шепли: аксиоматизации

### Теорема (Hart, Mas-Collel, 1989)

Существует единственное такое эффективное одноточечное решение  $\sigma$ , что найдется такая функция  $P : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ , что для любой игры  $(N, v) \in \mathcal{G}$

$$\sigma_i(N, v) = P(N, v) - P(N \setminus \{i\}, v) \text{ для всех } i \in N.$$

*Это значение Шепли*

## Значение Шепли: аксиоматизации

Харт и Мас-Коллел описали значение Шепли через согласованность: Для игры  $(N, v)$  и коалиции  $S \subset N$  редуцированная игра  $(S, v_\sigma^S)$  (для одноточечного решения  $\sigma$  задается следующим образом):

$$v_\sigma^S(T) = v(T \cup N \setminus S) - \sum_{i \in N \setminus S} \sigma_i(T \cup N \setminus S, v).$$

**Теорема (Hart, Mas-Collel, 1989)**

*Значение Шепли является единственным одноточечным значением, удовлетворяющим стандартности и согласованности.*



## Свойство сбалансированных вкладов

Будем говорить, что решение  $\sigma$  обладает свойством сбалансированных вкладов, если для любой игры  $(N, v)$  и для любой пары игроков  $i, j \in N$  выполнено:

$$\sigma_i(N, v) - \sigma_i(N \setminus \{j\}) = \sigma_j(N, v) - \sigma_j(N \setminus \{i\})$$

### Теорема (Майерсон, 1977)

*Существует только одно эффективное решение, обладающее свойством сбалансированных вкладов - это значение Шепли.*

# Монотонность

## Определение

Одноточечное решение  $\sigma$  *коалиционно моноotonно*, если для любых двух игр  $(N, v)$ ,  $(N, w)$ , для которых существует такая коалиция  $S \subset N$ , что

1.  $w(S) > v(S)$
2.  $v(T) = w(T)$  для всех  $T \neq S$

выполняется  $\sigma_i(N, w) \geq \sigma_i(N, v)$  для всех  $i \in S$ .

# Монотонность

## Определение

Одноточечное решение  $\sigma$  **коалиционно моноotonно**, если для любых двух игр  $(N, v)$ ,  $(N, w)$ , для которых существует такая коалиция  $S \subset N$ , что

1.  $w(S) > v(S)$
2.  $v(T) = w(T)$  для всех  $T \neq S$

выполняется  $\sigma_i(N, w) \geq \sigma_i(N, v)$  для всех  $i \in S$ .

## Определение

Одноточечное решение  $\sigma$  **сильно моноotonно**, если для любых двух игр  $(N, v)$ ,  $(N, w)$ , для которых существует такой игрок  $i \in N$ , что для любой коалиции  $S$  верно  $w(S \cup \{i\}) - w(S) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S)$  выполняется

$\sigma_i(N, w) \geq \sigma_i(N, v)$ .

# Монотонность

## Определение

Одноточечное решение  $\sigma$  **коалиционно монотонно**, если для любых двух игр  $(N, v)$ ,  $(N, w)$ , для которых существует такая коалиция  $S \subset N$ , что

1.  $w(S) > v(S)$
2.  $v(T) = w(T)$  для всех  $T \neq S$

выполняется  $\sigma_i(N, w) \geq \sigma_i(N, v)$  для всех  $i \in S$ .

## Определение

Одноточечное решение  $\sigma$  **сильно монотонно**, если для любых двух игр  $(N, v)$ ,  $(N, w)$ , для которых существует такой игрок  $i \in N$ , что для любой коалиции  $S$  верно  $w(S \cup \{i\}) - w(S) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S)$  выполняется

$\sigma_i(N, w) \geq \sigma_i(N, v)$ .

## Теорема (Янг, 1985)

Существует только одно эффективное, симметричное и сильно монотонное решение - это значение Шепли.

## Домашнее задание

**26.** Докажите теорему Бондаревой-Шепли:

Для того, чтобы  $S$ -ядро в игре  $(N, v)$  было непусто, необходимо и достаточно, чтобы для любого минимального сбалансированного набора  $\mathcal{B}$  выполнялось неравенство:

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S v(S) \leq v(N).$$

## Домашнее задание

27. Пусть  $N$  - множество из 5 элементов. Существует ли минимальный сбалансированный набор  $\mathcal{B} \subset 2^N$ , в котором
- Больше 5 элементов
  - Больше 6 элементов

## Домашнее задание

**28.** Имеется комитет, состоящий из 4 человек: A, B, C, D, A является председателем. Комитет принимает решение по правилу большинства, но в случае ничьей 2–2 принимается решение, за которое голосует председатель. Перечислить выигрывающие коалиции и найти значение Шепли в соответствующей простой игре.

## Домашнее задание

**29.** Докажите, что любая игра банкротства является выпуклой.



## Домашнее задание

- 30.** а. Докажите, что в выпуклой игре значение Шепли лежит в  $S$ -ядре.  
б. Верно ли это для произвольной супераддитивной игры?

## Домашнее задание

31. Докажите теорему Янга:

Теорема (Янг, 1985)

*Существует только одно эффективное, симметричное и строго монотонное решение решение - это значение Шепли.*