Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \dots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофант искал решения в (положительных) рациональных числах

Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофант искал решения в (положительных) рациональных числах

Гильберт спрашивал про решение диофантовых уравнений в целых числах

Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофант искал решения в (положительных) рациональных числах

Гильберт спрашивал про решение диофантовых уравнений в целых числах

Можно также ограничиться только решениями в положительных целых числах или только в неотрицательных целых числах

Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантово уравнение* имеет вид

$$M(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где M – многочлен с целыми коэффициентами.

Диофант искал решения в (положительных) рациональных числах

Гильберт спрашивал про решение диофантовых уравнений в целых числах

Можно также ограничиться только решениями в положительных целых числах или только в неотрицательных целых числах

Формализмы для описания параллельных/распределенных вычислений

Формализмы для описания параллельных/распределенных вычислений

Сети Петри (Petri net, place/transition net, P/T net)

Формализмы для описания параллельных/распределенных вычислений

Сети Петри (Petri net, place/transition net, P/T net)

Wikipedia:

Формализмы для описания параллельных/распределенных вычислений

Сети Петри (Petri net, place/transition net, P/T net)

Wikipedia: Petri nets were invented by Carl Adam Petri

Формализмы для описания параллельных/распределенных вычислений

Сети Петри (Petri net, place/transition net, P/T net)

Wikipedia: Petri nets were invented by Carl Adam Petri in August 1939

Формализмы для описания параллельных/распределенных вычислений

Сети Петри (Petri net, place/transition net, P/T net)

Wikipedia: Petri nets were invented by Carl Adam Petri in August 1939 – at the age of 13

Формализмы для описания параллельных/распределенных вычислений

Сети Петри (Petri net, place/transition net, P/T net)

Wikipedia: Petri nets were invented by Carl Adam Petri in August 1939 – at the age of 13 – for the purpose of describing chemical processes

Формализмы для описания параллельных/распределенных вычислений

Сети Петри (Petri net, place/transition net, P/T net)

Wikipedia: Petri nets were invented by Carl Adam Petri in August 1939 – at the age of 13 – for the purpose of describing chemical processes

Системы векторного сложения (systems of vector addition)

Системы векторного сложения

$$\Delta_1 = \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle$$
$$\vdots$$
$$\Delta_k = \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle$$

Системы векторного сложения

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle \end{aligned} \qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

Системы векторного сложения

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle \end{aligned} \qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_1 \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$$

Системы векторного сложения

$$\Delta_1 = \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle$$

$$\vdots \qquad\qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta_k = \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle$$

$$\alpha_1 \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$$

$$A = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$$

Системы векторного сложения

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle \end{aligned} \qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_1 \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$$

$$A = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \to \langle \alpha_1 + \delta_{j,1}, \ldots, \alpha_n + \delta_{j,n} \rangle = A + \Delta_j$$

Системы векторного сложения

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \langle \delta_{1,1}, \dots, \delta_{1,n} \rangle \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \langle \delta_{k,1}, \dots, \delta_{k,n} \rangle\end{aligned} \qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_1 \in \mathbb{N}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$$

$$A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \to \langle \alpha_1 + \delta_{j,1}, \dots, \alpha_n + \delta_{j,n} \rangle = A + \Delta_j$$

$$\alpha_1 + \delta_{j,1} \in \mathbb{N}, \dots, \alpha_n + \delta_{j,n} \in \mathbb{N}$$

Системы векторного сложения

$$\Delta_1 = \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle$$
$$\vdots$$
$$\Delta_k = \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle$$

$$\delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_1 \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$$

$$A = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \to \langle \alpha_1 + \delta_{j,1}, \ldots, \alpha_n + \delta_{j,n} \rangle = A + \Delta_j$$

$$\alpha_1 + \delta_{j,1} \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n + \delta_{j,n} \in \mathbb{N}$$

$A \to A + \Delta_{j_1}$

Системы векторного сложения

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle\end{aligned} \qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_1 \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$$

$$A = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \to \langle \alpha_1 + \delta_{j,1}, \ldots, \alpha_n + \delta_{j,n} \rangle = A + \Delta_j$$

$$\alpha_1 + \delta_{j,1} \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n + \delta_{j,n} \in \mathbb{N}$$

$$A \to A + \Delta_{j_1} \to A + \Delta_{j_1} + \Delta_{j_2}$$

Системы векторного сложения

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle \end{aligned} \qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_1 \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$$

$$A = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \to \langle \alpha_1 + \delta_{j,1}, \ldots, \alpha_n + \delta_{j,n} \rangle = A + \Delta_j$$

$$\alpha_1 + \delta_{j,1} \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n + \delta_{j,n} \in \mathbb{N}$$

$$A \to A + \Delta_{j_1} \to A + \Delta_{j_1} + \Delta_{j_2} \to A + \Delta_{j_1} + \Delta_{j_2} + \Delta_{j_3}$$

Системы векторного сложения

$$\Delta_1 = \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle$$

$$\vdots \qquad\qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta_k = \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle$$

$$\alpha_1 \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$$

$$A = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \to \langle \alpha_1 + \delta_{j,1}, \ldots, \alpha_n + \delta_{j,n} \rangle = A + \Delta_j$$

$$\alpha_1 + \delta_{j,1} \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n + \delta_{j,n} \in \mathbb{N}$$

$$A \to A + \Delta_{j_1} \to A + \Delta_{j_1} + \Delta_{j_2} \to A + \Delta_{j_1} + \Delta_{j_2} + \Delta_{j_3} \to \ldots$$

Проблема достижимости

Проблема достижимости

ВХОД: Система векторного сложения $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ и два вектора A и B

Проблема достижимости

ВХОД: Система векторного сложения $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ и два вектора A и B

ВОПРОС: Верно ли, что вектор B достижим из вектора A в этой системе?

Проблема включения

Проблема включения

ВХОД: Две системы векторного сложения $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$ и $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ и вектор A

Проблема включения

ВХОД: Две системы векторного сложения $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ и $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ и вектор A

ВОПРОС: Верно ли, что каждый вектор, достижимый из вектора A во второй системе, достижим из вектора A также и в первой системе?

Проблема включения

ВХОД: Две системы векторного сложения $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$ и $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ и вектор A

ВОПРОС: Верно ли, что каждый вектор, достижимый из вектора A во второй системе, достижим из вектора A также и в первой системе?

Теорема (Michael Rabin, не опубликовано). *Проблема включения для систем векторного сложения неразрешима.*

Проблема включения

ВХОД: Две системы векторного сложения $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$ и $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ и вектор A

ВОПРОС: Верно ли, что каждый вектор, достижимый из вектора A во второй системе, достижим из вектора A также и в первой системе?

Теорема (Michael Rabin, не опубликовано). *Проблема включения для систем векторного сложения неразрешима.*

Проблема эквивалентности

ВХОД: Две системы векторного сложения $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$ и $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ и вектор A

ВОПРОС: Верно ли, что каждый вектор, достижимый из вектора A в одной из этих систем, достижим из вектора A также и в другой системе?

Проблема эквивалентности

ВХОД: Две системы векторного сложения $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$ и $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ и вектор A

ВОПРОС: Верно ли, что каждый вектор, достижимый из вектора A в одной из этих систем, достижим из вектора A также и в другой системе?

Теорема (M. Hack; T. Araki и T. Kasami). *Проблема эквивалентности для систем векторного сложения неразрешима.*

Обобщенные кони на многомерной шахматной доске

$$\begin{gathered}\Delta_1 = \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle \\ \vdots \\ \Delta_k = \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle\end{gathered} \qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

Обобщенные кони на многомерной шахматной доске

$$\Delta_1 = \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle$$

$$\vdots \qquad \qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta_k = \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle$$

Обозначение. $\mathfrak{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – это множество всех полей, на которых может побывать конь, начав свой путь с поля $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$

Обобщенные кони на многомерной шахматной доске

$$\Delta_1 = \langle \delta_{1,1}, \dots, \delta_{1,n} \rangle$$

$$\vdots \qquad\qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta_k = \langle \delta_{k,1}, \dots, \delta_{k,n} \rangle$$

Обозначение. $\mathfrak{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – это множество всех полей, на которых может побывать конь, начав свой путь с поля $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$

Проблема включения

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Обобщенные кони на многомерной шахматной доске

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle \end{aligned} \qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

Обозначение. $\mathfrak{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – это множество всех полей, на которых может побывать конь, начав свой путь с поля $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$

Проблема включения

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Проблема эквивалентности

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) = \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Сравнение проблем

Обозначение. $\mathfrak{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – это множество всех полей, на которых может побывать конь, начав свой путь с поля $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$

Сравнение проблем

Обозначение. $\mathfrak{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – это множество всех полей, на которых может побывать конь, начав свой путь с поля $\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle$

Проблема включения

ВХОД:	Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$
ВОПРОС:	Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Сравнение проблем

Обозначение. $\mathfrak{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – это множество всех полей, на которых может побывать конь, начав свой путь с поля $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$

Проблема включения

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Проблема эквивалентности

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) = \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Сравнение проблем

Обозначение. $\mathfrak{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – это множество всех полей, на которых может побывать конь, начав свой путь с поля $\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle$

Проблема включения

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Проблема эквивалентности

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) = \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

$$\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) = \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \iff \mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \& \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}'(\mathcal{A})$$

Специальные кони

$$\langle \delta_1, \ldots, \delta_n \rangle \qquad \delta_m \in \{-1, 0, 1\}$$

Специальные кони

$$\langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle \qquad \delta_m \in \{-1, 0, 1\}$$

$$\delta_{i_1} = \dots = \delta_{i_a} = -1$$

Специальные кони

$$\langle \delta_1, \ldots, \delta_n \rangle \qquad \delta_m \in \{-1, 0, 1\}$$

$$\delta_{i_1} = \cdots = \delta_{i_a} = -1$$
$$\delta_{j_1} = \cdots = \delta_{j_b} = 1$$

Специальные кони

$$\langle \delta_1, \ldots, \delta_n \rangle \qquad \delta_m \in \{-1, 0, 1\}$$

$$\delta_{i_1} = \cdots = \delta_{i_a} = -1$$
$$\delta_{j_1} = \cdots = \delta_{j_b} = 1$$
$$\delta_m = 0, \text{ если } \ m \notin \{i_1, \ldots, i_a, j_1, \ldots, j_b\}$$

Специальные кони

$$\langle \delta_1, \ldots, \delta_n \rangle \qquad \delta_m \in \{-1, 0, 1\}$$

$$\delta_{i_1} = \cdots = \delta_{i_a} = -1$$
$$\delta_{j_1} = \cdots = \delta_{j_b} = 1$$
$$\delta_m = 0, \text{ если } \; m \notin \{i_1, \ldots, i_a, j_1, \ldots, j_b\}$$

$$\langle i_1, \ldots, i_a \rangle \rightarrowtail \langle j_1, \ldots, j_b \rangle$$

Специальные кони

$$\langle \delta_1, \ldots, \delta_n \rangle \qquad \delta_m \in \{-1, 0, 1\}$$

$$\begin{aligned}
&\delta_{i_1} = \cdots = \delta_{i_a} = -1\\
&\delta_{j_1} = \cdots = \delta_{j_b} = 1\\
&\delta_m = 0, \text{ если } \ m \notin \{i_1, \ldots, i_a, j_1, \ldots, j_b\}
\end{aligned}$$

$$\langle i_1, \ldots, i_a \rangle \rightarrowtail \langle j_1, \ldots, j_b \rangle$$

$$R_{i_1} \ldots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1} \ldots R_{j_b}$$

Шахматная машина

Шахматная машина

Шахматная машина имеет конечное количество *регистров* $R_1, \ldots, R_n$, каждый из которых может содержать произвольно большое натуральное число.

Шахматная машина

Шахматная машина имеет конечное количество *регистров* $R_1, \ldots, R_n$, каждый из которых может содержать произвольно большое натуральное число. Машина может находиться в одном из конечного числа состояний $S_1, \ldots, S_m$;

Шахматная машина

Шахматная машина имеет конечное количество *регистров* $R_1, \ldots, R_n$, каждый из которых может содержать произвольно большое натуральное число. Машина может находиться в одном из конечного числа состояний $S_1, \ldots, S_m$; *инструкции* машины имеют вид

$$S_{i_0} R_{i_1} \ldots R_{i_a} \rightarrowtail S_{j_0} R_{j_1} \ldots R_{j_b}$$

где все числа $i_0, i_1, \ldots, i_a, j_0, j_1, \ldots, j_b$ попарно различны.

Шахматная машина

Шахматная машина имеет конечное количество *регистров* $R_1, \ldots, R_n$, каждый из которых может содержать произвольно большое натуральное число. Машина может находиться в одном из конечного числа состояний $S_1, \ldots, S_m$; *инструкции* машины имеют вид

$$S_{i_0} R_{i_1} \ldots R_{i_a} \rightarrowtail S_{j_0} R_{j_1} \ldots R_{j_b}$$

где все числа $i_0, i_1, \ldots, i_a, j_0, j_1, \ldots, j_b$ попарно различны.

Шахматная машина является недетерминированной!

Вычисления на шахматной машине

Определение. Пусть в некоторой шахматной машине выделено начальное состояние S_b

Вычисления на шахматной машине

Определение. Пусть в некоторой шахматной машине выделено начальное состояние S_b , заключительное состояние S_e

Вычисления на шахматной машине

Определение. Пусть в некоторой шахматной машине выделено начальное состояние S_b , заключительное состояние S_e , входные регистры $I_{i_1}, \ldots, I_{i_k}$ и выходной регистр O_j.

Вычисления на шахматной машине

Определение. Пусть в некоторой шахматной машине выделено начальное состояние S_b , заключительное состояние S_e , входные регистры $I_{i_1}, \ldots, I_{i_k}$ и выходной регистр O_j. Поместим коня на поле

$$\langle r_1, \ldots, r_n \rangle \tag{$*$}$$

где $r_b = 1,\ \ r_{i_1} = x_1, \ldots,\ r_{i_k} = x_k$, а все остальные регистры пусты.

Вычисления на шахматной машине

Определение. Пусть в некоторой шахматной машине выделено начальное состояние S_b , заключительное состояние S_e , входные регистры $I_{i_1}, \ldots, I_{i_k}$ и выходной регистр O_j. Поместим коня на поле

$$\langle r_1, \ldots, r_n \rangle \qquad (*)$$

где $r_b = 1$, $r_{i_1} = x_1$,..., $r_{i_k} = x_k$, а все остальные регистры пусты. Мы говорим, что шахматная машина вычисляет функцию $F(x_1, \ldots, x_k)$, если выполены следующие три условия.

Вычисления на шахматной машине

Определение. Пусть в некоторой шахматной машине выделено начальное состояние S_b , заключительное состояние S_e , входные регистры $I_{i_1}, \ldots, I_{i_k}$ и выходной регистр O_j. Поместим коня на поле

$$\langle r_1, \ldots, r_n \rangle \qquad (*)$$

где $r_b = 1$, $r_{i_1} = x_1, \ldots, r_{i_k} = x_k$, а все остальные регистры пусты. Мы говорим, что шахматная машина вычисляет функцию $F(x_1, \ldots, x_k)$, если выполены следующие три условия.

1. Если поле $\langle r'_1, \ldots, r'_n \rangle$ достижимо с поля $(*)$, то $r'_j \leq F(x_1, \ldots, x_k)$

Вычисления на шахматной машине

Определение. Пусть в некоторой шахматной машине выделено начальное состояние S_b , заключительное состояние S_e , входные регистры $I_{i_1}, \ldots, I_{i_k}$ и выходной регистр O_j. Поместим коня на поле

$$\langle r_1, \ldots, r_n \rangle \tag{$*$}$$

где $r_b = 1$, $r_{i_1} = x_1, \ldots,$ $r_{i_k} = x_k$, а все остальные регистры пусты. Мы говорим, что шахматная машина вычисляет функцию $F(x_1, \ldots, x_k)$, если выполены следующие три условия.

1. Если поле $\langle r'_1, \ldots, r'_n \rangle$ достижимо с поля $(*)$, то $r'_j \leq F(x_1, \ldots, x_k)$
2. Для любого y такого, что $y \leq F(x_1, \ldots, x_k)$, существует поле $\langle r'_1, \ldots, r'_n \rangle$, достижимое с поля $(*)$ и такое, что $r_j = y$, $r_e = 1$.

Вычисления на шахматной машине

Определение. Пусть в некоторой шахматной машине выделено начальное состояние S_b , заключительное состояние S_e , входные регистры $I_{i_1}, \dots, I_{i_k}$ и выходной регистр O_j. Поместим коня на поле

$$\langle r_1, \dots, r_n \rangle \tag{$*$}$$

где $r_b = 1$, $r_{i_1} = x_1, \dots,$ $r_{i_k} = x_k$, а все остальные регистры пусты. Мы говорим, что шахматная машина вычисляет функцию $F(x_1, \dots, x_k)$, если выполены следующие три условия.

1. Если поле $\langle r'_1, \dots, r'_n \rangle$ достижимо с поля $(*)$, то $r'_j \leq F(x_1, \dots, x_k)$
2. Для любого y такого, что $y \leq F(x_1, \dots, x_k)$, существует поле $\langle r'_1, \dots, r'_n \rangle$, достижимое с поля $(*)$ и такое, что $r_j = y$, $r_e = 1$.
3. Состояние S_e не встречается в левых частях инструкций машины.

Сложение чисел

$$S_1 I_4 \rightarrowtail S_2 O_6$$
$$S_1 I_5 \rightarrowtail S_2 O_6$$
$$S_1 \rightarrowtail S_3$$
$$S_2 \rightarrowtail S_1$$

Умножение чисел

$$
\begin{aligned}
S_1 I_6 &\rightarrowtail S_2 \\
S_2 I_7 &\rightarrowtail S_3 R_8 O_9 \\
S_3 &\rightarrowtail S_2 \\
S_3 &\rightarrowtail S_4 \\
S_4 R_8 &\rightarrowtail S_1 I_7 \\
S_1 &\rightarrowtail S_4 \\
S_1 &\rightarrowtail S_5
\end{aligned}
$$

Сложение функций

Лемма. Имея две шахматные машины $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$, вычисляющие функции $F_1(x_1, \ldots, x_{m_1})$ и $F_2(y_1, \ldots, y_{m_2})$ соответственно, мы можем построить машину $\mathfrak{K}$, вычисляющую функцию

$$F(z_1, \ldots, z_{m_1+m_2}) = F_1(z_1, \ldots, z_{m_1}) + F_2(z_{m_1+1}, \ldots, z_{m_1+m_2}).$$

Сложение функций

Лемма. Имея две шахматные машины $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$, вычисляющие функции $F_1(x_1, \dots, x_{m_1})$ и $F_2(y_1, \dots, y_{m_2})$ соответственно, мы можем построить машину $\mathfrak{K}$, вычисляющую функцию

$$F(z_1, \dots, z_{m_1+m_2}) = F_1(z_1, \dots, z_{m_1}) + F_2(z_{m_1+1}, \dots, z_{m_1+m_2}).$$

$$\begin{aligned} S_1 I_4 &\rightarrowtail S_2 O_6 \\ S_1 I_5 &\rightarrowtail S_2 O_6 \\ S_1 &\rightarrowtail S_3 \\ S_2 &\rightarrowtail S_1 \end{aligned}$$

Умножение функций

Лемма. Имея две шахматные машины $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$, вычисляющие функции $F_1(x_1, \ldots, x_{m_1})$ и $F_2(y_1, \ldots, y_{m_2})$ соответственно, мы можем построить машину $\mathfrak{K}$, вычисляющую функцию

$$F(z_1, \ldots, z_{m_1+m_2}) = F_1(z_1, \ldots, z_{m_1}) \times F_2(z_{m_1+1}, \ldots, z_{m_1+m_2}).$$

Умножение функций

Лемма. Имея две шахматные машины $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$, вычисляющие функции $F_1(x_1, \ldots, x_{m_1})$ и $F_2(y_1, \ldots, y_{m_2})$ соответственно, мы можем построить машину $\mathfrak{K}$, вычисляющую функцию

$$F(z_1, \ldots, z_{m_1+m_2}) = F_1(z_1, \ldots, z_{m_1}) \times F_2(z_{m_1+1}, \ldots, z_{m_1+m_2}).$$

$$\begin{aligned}
S_1 I_6 &\rightarrowtail S_2 \\
S_2 I_7 &\rightarrowtail S_3 R_8 O_9 \\
S_3 &\rightarrowtail S_2 \\
S_3 &\rightarrowtail S_4 \\
S_4 R_8 &\rightarrowtail S_1 I_7 \\
S_1 &\rightarrowtail S_4 \\
S_1 &\rightarrowtail S_5
\end{aligned}$$

Альтернативы

$$D(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

Альтернативы

$$D(x_1, \dots, x_m) = 0$$

- либо
$$\exists x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) \neq 0\}$$

Альтернативы

$$D(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

- либо
$$\exists x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) \neq 0\}$$
$$D^2(x_1, \ldots, x_m) = A(x_1, \ldots, x_m) - B(x_1, \ldots, x_m)$$

Альтернативы

$$D(x_1, \dots, x_m) = 0$$

- либо
$$\exists x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) \neq 0\}$$

$$D^2(x_1, \dots, x_m) = A(x_1, \dots, x_m) - B(x_1, \dots, x_m)$$

$$A(x_1, \dots, x_m) \geq B(x_1, \dots, x_m)$$

Альтернативы

$$D(x_1, \dots, x_m) = 0$$

- либо
$$\exists x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) \neq 0\}$$

$$D^2(x_1, \dots, x_m) = A(x_1, \dots, x_m) - B(x_1, \dots, x_m)$$

$$A(x_1, \dots, x_m) \geq B(x_1, \dots, x_m)$$

- либо
$$\exists x_1 \dots x_m \{A(x_1, \dots, x_m) = B(x_1, \dots, x_m)\}$$
- либо
$$\forall x_1 \dots x_m \{A(x_1, \dots, x_m) \geq B(x_1, \dots, x_m) + 1\}$$

Альтернативы

$$D(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

- либо
$$\exists x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) \neq 0\}$$

$$D^2(x_1, \ldots, x_m) = A(x_1, \ldots, x_m) - B(x_1, \ldots, x_m)$$

$$A(x_1, \ldots, x_m) \geq B(x_1, \ldots, x_m)$$

- либо
$$\exists x_1 \ldots x_m \{A(x_1, \ldots, x_m) = B(x_1, \ldots, x_m)\}$$
- либо
$$\forall x_1 \ldots x_m \{A(x_1, \ldots, x_m) \geq B(x_1, \ldots, x_m) + 1\}$$

Машина $\mathfrak{K}'_A$

$$A(x_1, \ldots, x_m)$$

Машина $\mathfrak{K}'_A$

$$A(x_1, \ldots, x_m) \quad = A'(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{w \text{ times}}, \ldots, \underbrace{x_m, \ldots, x_m}_{w \text{ times}}),$$

Машина $\mathfrak{K}'_A$

$$A(x_1, \ldots, x_m) \quad = A'(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{w \text{ times}}, \ldots, \underbrace{x_m, \ldots, x_m}_{w \text{ times}}),$$

Построим шахматную машину, вычисляющую A'.

Машина $\mathfrak{K}'_A$

$$A(x_1, \ldots, x_m) \quad = A'(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{w \text{ times}}, \ldots, \underbrace{x_m, \ldots, x_m}_{w \text{ times}}),$$

Построим шахматную машину, вычисляющую A'. Пусть $R_{i_{1,1}}$, ..., $R_{i_{m,w}}$ – её входные регистры

Машина $\mathfrak{K}'_A$

$$A(x_1, \ldots, x_m) \quad = A'(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{w \text{ times}}, \ldots, \underbrace{x_m, \ldots, x_m}_{w \text{ times}}),$$

Построим шахматную машину, вычисляющую A'. Пусть $R_{i_{1,1}}, \ldots, R_{i_{m,w}}$ – её входные регистры, B_{m+1} – выходной регистр

Машина $\mathfrak{K}'_A$

$$A(x_1, \ldots, x_m) \quad = A'(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{w \text{ times}}, \ldots, \underbrace{x_m, \ldots, x_m}_{w \text{ times}}),$$

Построим шахматную машину, вычисляющую A'. Пусть $R_{i_{1,1}}, \ldots, R_{i_{m,w}}$ – её входные регистры, B_{m+1} – выходной регистр, S_b – начальное состояние

Машина $\mathfrak{K}'_A$

$$A(x_1, \ldots, x_m) \quad = A'(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{w \text{ times}}, \ldots, \underbrace{x_m, \ldots, x_m}_{w \text{ times}}),$$

Построим шахматную машину, вычисляющую A'. Пусть $R_{i_{1,1}}, \ldots, R_{i_{m,w}}$ – её входные регистры, B_{m+1} – выходной регистр, S_b – начальное состояние, а номера всех остальных регистров и состояний превосходят $m + 9$.

Машина $\mathfrak{K}'_A$

$$A(x_1,\dots,x_m) \quad = A'(\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{w\ \text{times}},\dots,\underbrace{x_m,\dots,x_m}_{w\ \text{times}}),$$

Построим шахматную машину, вычисляющую A'. Пусть $R_{i_{1,1}}, \dots, R_{i_{m,w}}$ – её входные регистры, B_{m+1} – выходной регистр, S_b – начальное состояние, а номера всех остальных регистров и состояний превосходят $m+9$. Добавим следующие инструкции:

$$\begin{aligned}
S_{m+2} &\rightarrowtail S_{m+3} R_{i_{1,1}} \dots R_{i_{1,w}} X_1 \\
\dots &\rightarrowtail \dots \\
S_{m+2} &\rightarrowtail S_{m+3} R_{i_{m,1}} \dots R_{i_{m,w}} X_m \\
S_{m+3} &\rightarrowtail S_{m+2} \\
S_{m+3} &\rightarrowtail S_b,
\end{aligned}$$

Обозначим полученную машину через $\mathfrak{K}'_A$

Машина $\mathfrak{K}'_A$

$$A(x_1, \ldots, x_m) \quad = A'(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{w \text{ times}}, \ldots, \underbrace{x_m, \ldots, x_m}_{w \text{ times}}),$$

Построим шахматную машину, вычисляющую A'. Пусть $R_{i_{1,1}}, \ldots, R_{i_{m,w}}$ – её входные регистры, B_{m+1} – выходной регистр, S_b – начальное состояние, а номера всех остальных регистров и состояний превосходят $m+9$. Добавим следующие инструкции:

$$\begin{aligned}
S_{m+2} &\rightarrowtail S_{m+3} R_{i_{1,1}} \ldots R_{i_{1,w}} X_1 \\
\ldots &\rightarrowtail \ldots \\
S_{m+2} &\rightarrowtail S_{m+3} R_{i_{m,1}} \ldots R_{i_{m,w}} X_m \\
S_{m+3} &\rightarrowtail S_{m+2} \\
S_{m+3} &\rightarrowtail S_b,
\end{aligned}$$

Обозначим полученную машину через $\mathfrak{K}'_A$, её начальным состоянием объявим S_{m+2}.

Машина $\mathfrak{K}''_B$

$$B(x_1, \dots, x_m) + 1 = B''(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{w \text{ times}}, \dots, \underbrace{x_m, \dots, x_m}_{w \text{ times}}).$$

Построим шахматную машину, вычисляющую B', Пусть $R_{i_{1,1}}, \dots, R_{i_{m,w}}$ – её входные регистры, B_{m+1} – выходной регистр, S_b – начальное состояние, а номера всех остальных регистров и состояний превосходят $m+9$. Добавим следующие инструкции:

$$\begin{aligned}
S_{m+2} &\rightarrowtail S_{m+3} R_{i_{1,1}} \dots R_{i_{1,w}} X_1 \\
\dots &\rightarrowtail \dots \\
S_{m+2} &\rightarrowtail S_{m+3} R_{i_{m,1}} \dots R_{i_{m,w}} X_m \\
S_{m+3} &\rightarrowtail S_{m+2} \\
S_{m+3} &\rightarrowtail S_b,
\end{aligned}$$

Обозначим полученную машину через $\mathfrak{K}''_B$, её начальным состоянием объявим S_{m+2}.

Машина $\mathfrak{K}'$

Добавим к машине $\mathfrak{K}_A$ следующие инструкции

Машина $\mathfrak{K}'$

Добавим к машине $\mathfrak{K}_A$ следующие инструкции

1. для каждого регистра R_i машины $\mathfrak{K}'_A$ кроме $X_1, \ldots, X_{m+1}$:

$$S_s R_i \rightarrowtail S_t$$

Машина $\mathfrak{K}'$

Добавим к машине $\mathfrak{K}_A$ следующие инструкции

1. для каждого регистра R_i машины $\mathfrak{K}'_A$ кроме $X_1, \ldots, X_{m+1}$:

$$S_s R_i \rightarrowtail S_t$$

2. для каждого регистра R_j машины $\mathfrak{K}_B$ кроме $X_1, \ldots, X_{m+1}$:

$$S_s \rightarrowtail S_t R_j$$

Машина $\mathfrak{K}'$

Добавим к машине $\mathfrak{K}_A$ следующие инструкции

1. для каждого регистра R_i машины $\mathfrak{K}'_A$ кроме $X_1, \ldots, X_{m+1}$:

$$S_s R_i \rightarrowtail S_t$$

2. для каждого регистра R_j машины $\mathfrak{K}_B$ кроме $X_1, \ldots, X_{m+1}$:

$$S_s \rightarrowtail S_t R_j$$

3. для каждого состояния S_k машины $\mathfrak{K}_B$:

$$S_s \rightarrowtail S_k$$

Машина $\mathfrak{K}'$

Добавим к машине $\mathfrak{K}_A$ следующие инструкции

1. для каждого регистра R_i машины $\mathfrak{K}'_A$ кроме $X_1, \ldots, X_{m+1}$:

$$S_s R_i \rightarrowtail S_t$$

2. для каждого регистра R_j машины $\mathfrak{K}_B$ кроме $X_1, \ldots, X_{m+1}$:

$$S_s \rightarrowtail S_t R_j$$

3. для каждого состояния S_k машины $\mathfrak{K}_B$:

$$S_s \rightarrowtail S_k$$

4.

$$S_t \rightarrowtail S_s$$

Машина $\mathfrak{K}''$

Машина $\mathfrak{K}''$ имеет те же инструкции, что и машина $\mathfrak{K}''_B$, но к ней добавлены все регистры машины $\mathfrak{K}'_A$.

Машина $\mathfrak{K}''$

Машина $\mathfrak{K}''$ имеет те же инструкции, что и машина $\mathfrak{K}''_B$, но к ней добавлены все регистры машины $\mathfrak{K}'_A$.

$$\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\exists x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) = 0\}$$

Машина $\mathfrak{K}''$

Машина $\mathfrak{K}''$ имеет те же инструкции, что и машина $\mathfrak{K}''_B$, но к ней добавлены все регистры машины $\mathfrak{K}'_A$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \neg\exists x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) = 0\} \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) \neq 0\}\end{aligned}$$

Машина $\mathfrak{K}''$

Машина $\mathfrak{K}''$ имеет те же инструкции, что и машина $\mathfrak{K}''_B$, но к ней добавлены все регистры машины $\mathfrak{K}'_A$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \neg\exists x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) = 0\} \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) \neq 0\}
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \not\supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) = 0\}$$

Машина $\mathfrak{K}''$

Машина $\mathfrak{K}''$ имеет те же инструкции, что и машина $\mathfrak{K}''_B$, но к ней добавлены все регистры машины $\mathfrak{K}'_A$.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \neg\exists x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) = 0\} \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) \neq 0\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \not\supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) = 0\} \\
&\Longleftrightarrow \quad \neg\forall x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) \neq 0\}
\end{aligned}
$$

Машина $\mathfrak{K}''$

Машина $\mathfrak{K}''$ имеет те же инструкции, что и машина $\mathfrak{K}''_B$, но к ней добавлены все регистры машины $\mathfrak{K}'_A$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \neg\exists x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) = 0\} \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) \neq 0\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \not\supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) = 0\} \\
&\Longleftrightarrow \quad \neg\forall x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) \neq 0\}
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \not\supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \quad \Leftarrow \quad \exists x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) = 0\}$$

Машина $\mathfrak{K}''$

Машина $\mathfrak{K}''$ имеет те же инструкции, что и машина $\mathfrak{K}''_B$, но к ней добавлены все регистры машины $\mathfrak{K}'_A$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \quad &\iff \quad \neg\exists x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) = 0\} \\ &\iff \quad \forall x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) \neq 0\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \not\supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \quad &\iff \quad \exists x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) = 0\} \\ &\iff \quad \neg\forall x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) \neq 0\}\end{aligned}$$

$$\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \not\supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \quad \Leftarrow \quad \exists x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) = 0\}$$

$$\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \quad \Leftarrow \quad \forall x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) \neq 0\}$$